# ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 5

## LIMITI DI SUCCESSIONI

Una SUCCESSIONE REALE $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ è una funzione che ad ogni intero $n\geq n_0$ associa un numero reale $a_{\underbrace{n}_{\text{indice}}}$ = termine $n$-simo

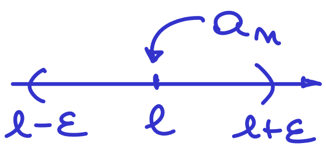
**ESEMPI**

- $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}_{n\geq 1}$ $\quad \overset{1}{\overset{\downarrow}{-1}},\ \overset{2}{\overset{\downarrow}{\frac{1}{2}}},\ \overset{3}{\overset{\downarrow}{-\frac{1}{3}}},\ \overset{4}{\overset{\downarrow}{\frac{1}{4}}},\ \overset{5}{\overset{\downarrow}{-\frac{1}{5}}},\ \dots,\ \overset{n}{\overset{\downarrow}{\frac{(-1)^n}{n}}},\ \dots$
- $\left\{\sqrt{n^2-5}\right\}_{n\geq 3}$ $\quad \overset{3}{\overset{\downarrow}{2}},\ \overset{4}{\overset{\downarrow}{\sqrt{11}}},\ \overset{5}{\overset{\downarrow}{\sqrt{20}}},\ \overset{6}{\overset{\downarrow}{\sqrt{31}}},\ \dots,\ \overset{n}{\overset{\downarrow}{\sqrt{n^2-5}}},\ \dots$

Il LIMITE DI UNA SUCCESSIONE $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ è definito come

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \forall M\in\mathbb{R}\ \overbrace{\exists N\geq n_0 : \forall n>N}^{\text{DEFINITIVAMENTE}}\ a_n>M \\ l\in\mathbb{R} & \text{se } \forall \varepsilon>0\ \exists N\geq n_0 : \forall n>N\ |a_n-l|<\varepsilon \\ -\infty & \text{se } \forall M\in\mathbb{R}\ \exists N\geq n_0 : \forall n>N\ a_n<M \\ \underset{\text{NON ESISTE}}{\nexists} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$|a_n-l|<\varepsilon \iff l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon \iff$$




Se il limite vale $l\in\mathbb{R}$ la successione si dice CONVERGENTE, se vale $+\infty$ o $-\infty$ si dice DIVERGENTE, se $\nexists$ si dice INDETERMINATA.

OSSERVAZIONE

Vale la DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE (DT)

$$\forall a,b\in\mathbb{R} \quad |a+b|\leq|a|+|b|.$$

## $\boxed{\text{ESEMPI}}$

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$

  perché $\forall M\in\mathbb{R}$ $n^2>M$ se $n>\sqrt{|M|}$ definitivamente

- $\lim\limits_{n\to\infty} 2-\sqrt{n} = -\infty$

  perché $\forall M\in\mathbb{R}$ $2-\sqrt{n}<M$ se $n>(2-M)^2$ definitivamente

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

  perché $\forall \varepsilon>0$ $\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right| = \frac{1}{n}<\varepsilon$ se $n>\frac{1}{\varepsilon}$ definitivamente

- $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = \nexists$

  $\{(-1)^n\}_{n\geq 0}$ è limitata e quindi non tende a $\pm\infty$.

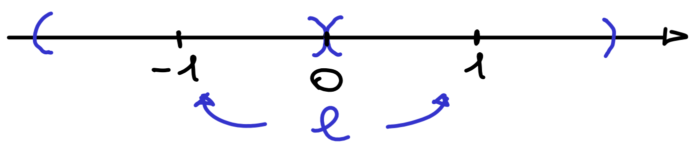
Se esistesse un limite $l\in\mathbb{R}$ allora per $\varepsilon=1>0$

$$\exists N\geq 0 : \forall n\geq N \quad |(-1)^n-l|<\varepsilon=1$$

ossia $|1-l|<1$ per $n$ pari e $|-1-l|<1$ per $n$ dispari

$$2=|1-l+l+1| \overset{DT}{\leq} |1-l|+|l+1| < 1+1 \leq 2$$

da cui $2<2$ contraddizione. Il limite non esiste.




OSSERVAZIONE

Il valore del limite di una successione $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ non dipende dall'indice iniziale $n_0$ o da da un numero finito dei suoi termini.

# PROPRIETÀ DEI LIMITI

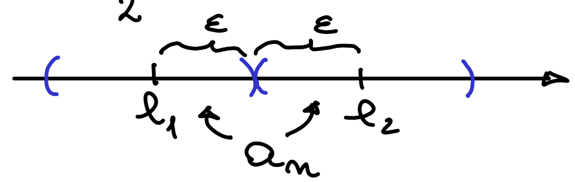
1) UNICITÀ: il limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ se esiste è unico

dim. Supponiamo che $\exists\, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ (caso finito-finito) con $\ell_1 \neq \ell_2$: $\forall \varepsilon > 0$ $\begin{cases} \exists N_1 : \forall n > N_1 \ |a_n - \ell_1| < \varepsilon \\ \exists N_2 : \forall n > N_2 \ |a_n - \ell_2| < \varepsilon \end{cases}$

allora $\forall n > \max(N_1, N_2)$

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - a_n + a_n - \ell_2| \overset{DT}{\leq} |a_n - \ell_1| + |a_n - \ell_2| < 2\varepsilon$$

Scegliendo $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2} > 0$ si ha una contraddizione.




$\square$

2) Se il limite $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ allora $\{a_n\}_n$ è limitata. Non vale il viceversa: $\{(-1)^n\}$ è una successione limitata ma non ha limite.

3) Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste allora per ogni sottosuccessione $\{a_{n_k}\}_k$ si ha $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n$.

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, \dots \to$ sottosuccessione $a_2, a_5, a_7, a_8, \dots$

OSSERVAZIONE

Se una successione ha due sottosuccessioni che convergono a limiti diversi allora la successione non ha limite.

Ad esempio $\{(-1)^n\}_n$ non ha limite perché

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{(-1)^{2n}}_{=1} = 1 \quad (2n \leftarrow \text{PARI}) \qquad \neq \qquad \lim_{n\to\infty} \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{=-1} = -1 \quad (2n+1 \leftarrow \text{DISPARI})$$

4) PERMANENZA DEL SEGNO: se $\lim_{n\to\infty} a_n = l > 0$ oppure $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ allora $a_n > 0$ definitivamente.

dim. Supponiamo che $\lim_{n\to\infty} a_n = l > 0$ (caso finito)

Allora per $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$ $\exists N : \forall n > N$ $\underbrace{l - \frac{l}{2}}_{= \frac{l}{2} > 0} < a_n < l + \frac{l}{2}$

da cui $\forall n > N$ $a_n > 0$. $\square$

5) CONFRONTO: se $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$ e definitivamente $a_n \leq b_n$ allora $l_1 \leq l_2$.

dim. Se per assurdo fosse $l_1 > l_2$ allora per $\varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{2} > 0$ $\exists N : \forall n \geq N$ $b_n < l_2 + \varepsilon = l_1 + \varepsilon < a_n$ contro il fatto che definitivamente $a_n \leq b_n$. $\square$

6) DOPPIO CONFRONTO: se $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l$ e definitivamente $a_n \leq c_n \leq b_n$ allora $\lim_{n\to\infty} c_n = l$.

7) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $\{b_n\}_{n\geq n_0}$ è limitata allora $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

dim. Dato che $\{b_n\}_{n\geq n_0}$ è limitata

$$\exists M > 0 : \forall n \geq n_0 \quad |b_n| \leq M$$

da cui

$$0 \leq |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M |a_n| \to 0$$

e per doppio confronto anche $a_n \cdot b_n \to 0$. $\square$

8) ALGEBRA DEI LIMITI: se $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$ allora

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = l_1 \pm l_2 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = l_1 \cdot l_2.$$

Se $l_2 \neq 0$ allora $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l_1}{l_2}$.

9) LIMITE DI UNA SUCCESSIONE MONOTONA:

se $\forall n \geq n_0 \quad a_n \leq a_{n+1}$ (SUCCESSIONE CRESCENTE)

allora $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq n_0\}$

se $\forall n \geq n_0 \quad a_n \geq a_{n+1}$ (SUCCESSIONE DECRESCENTE)

allora $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq n_0\}$

10) Per le funzioni elementari $|x|$, $x^a$, $a^x$, $\log_a(x)$ $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{tg}(x)$, $\operatorname{arcsen}(x)$, $\arccos(x)$ e $\operatorname{arctg}(x)$, si dimostra che

se $a_n \to l \in D$ allora $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(l)$.

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- $\lim_{n\to\infty} \log(\underbrace{e^{-n}}_{\to 0} + \underbrace{2\cos(\overbrace{\tfrac{1}{n^2+1}}^{\to 0})}_{\to 1}) = \log(2)$

- $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\operatorname{sen}(e^n)}_{\text{limitata}} \cdot \underbrace{(e^{\frac{1}{n}} - 1)}_{\to 0} = 0$

- $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\operatorname{arctg}(n)}_{\text{crescente}} = \sup\{\operatorname{arctg}(n) : n \in \mathbb{N}\} = \frac{\pi}{2}$

# FORME INDETERMINATE

L'algebra dei limiti si può in parte estendere anche alle successioni divergenti:

**SOMMA**

| $+$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\ell$ |
|---|---|---|---|
| $+\infty$ | $+\infty$ | ? | $+\infty$ |
| $-\infty$ | ? | $-\infty$ | $-\infty$ |

**PRODOTTO**

| $\cdot$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\ell>0$ | $0$ | $\ell<0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ? | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ? | $+\infty$ |

**RECIPROCO**

$$\frac{1}{\pm\infty}=0 \qquad \frac{1}{\underbrace{0^+}_{\text{tende a 0 con valori +}}}=+\infty \qquad \frac{1}{\underbrace{0^-}_{\text{tende a 0 con valori -}}}=-\infty$$

I casi "critici" indicati con ? si dicono FORME INDETERMINATE. Non hanno un risultato immediato e vanno indagate con più attenzione.

**ESEMPIO**

- $$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^{2n+1}}{3^n-7\cdot 2^n+(-1)^n}=\frac{+\infty-\infty}{+\infty-\infty+?}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 3^n-2\cdot 4^n}{3^n-7\cdot 2^n+(-1)^n}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{4}{3}\right)^n}_{+\infty}\cdot\frac{3\cdot\overbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}^{\to 0}-2}{1-7\cdot\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0}+\underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)^n}_{\to 0}}$$

$$=+\infty\cdot\frac{3\cdot 0-2}{1-7\cdot 0+0}=-\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}+\infty & \text{se } a>1\\ 1 & \text{se } a=1\\ 0 & \text{se } |a|<1\\ \nexists & \text{se } a\leq -1\end{cases}$$