

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 4

SUP E INF

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$.

$M \in \mathbb{R}$ si dice **MAGGIORANTE** di A se
 $\forall a \in A \quad a \leq M$

$m \in \mathbb{R}$ si dice **MINORANTE** di A se
 $\forall a \in A \quad m \leq a$

$M \in \mathbb{R}$ si dice **MASSIMO** di A e si scrive $M = \max(A)$ se
 $\forall a \in A \quad a \leq M$ e $M \in A$

$m \in \mathbb{R}$ si dice **MINIMO** di A e si scrive $m = \min(A)$ se
 $\forall a \in A \quad m \leq a$ e $m \in A$

A si dice **LIMITATO SUPERIORMENTE** se

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad a \leq M \quad \text{A ha almeno un maggiorante}$$

A si dice **LIMITATO INFERIORMENTE** se

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad m \leq a \quad \text{A ha almeno un minorante}$$

A si dice **LIMITATO** se

$$\exists M, m \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad m \leq a \leq M$$

ESEMPI

- $A = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

L'insieme dei maggioranti è vuoto.

L'insieme dei minoranti è $(-\infty, 0]$.

A non è limitato. $\min(A) = 0$, A non ha massimo.

- $A = (-2, 1) \cup [2, 3]$

L'insieme dei maggioranti è $[3, +\infty)$

L'insieme dei minoranti è $(-\infty, -2]$.

A è limitato. $\max(A) = 3$, A non ha minimo.

ASSIOMA DI COMPLETEZZA Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$.

Se A è limitato superiormente allora l'insieme dei maggioranti di A ha un elemento minimo che si dice ESTREMO SUPERIORE di A e si scrive $\sup(A)$.

Se A è limitato inferiormente allora l'insieme dei minoranti di A ha un elemento massimo che si dice ESTREMO INFERIORE di A e si scrive $\inf(A)$.

La definizione di \sup e \inf si estende agli insiemi non limitati:

$\sup(A) = +\infty$ se A non è limitato superiormente
 $\inf(A) = -\infty$ se A non è limitato inferiormente

OSSERVAZIONE

Se A ha un massimo allora $\max(A) = \sup(A)$.

Se A ha un minimo allora $\min(A) = \inf(A)$.

ESEMPI

- $A = \mathbb{N}$
 $\inf(A) = \min(A) = 0$ e $\sup(A) = +\infty$
- $A = (-2, 1) \cup [2, 3]$
 $\inf(A) = -2$ e $\sup(A) = \max(A) = 3$.

• $A = \left\{ \frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}^+ \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$

$\sup(A) = \max(A) = 1$. $\inf(A) = 0$ A non ha minimo.

Verifico che m , il massimo dei minoranti di A è 0 .
 $m \geq 0$ perché 0 è un minorante di A .

Se per assurdo fosse che $m > 0$ allora $\exists m \in \mathbb{N}^+$ tale che $m > \frac{1}{m}$ e quindi $m > \frac{1}{m} \in A$ ossia m non è un minorante di A . Contraddizione.
 Così $m = 0$.

• $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2 \right\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$

$\inf(A) = -\sqrt{2}$, A non ha minimo
 $\sup(A) = \sqrt{2}$, A non ha massimo } $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

• $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x-2 < \left| \frac{x}{x-1} \right| \right\}$

Il segno di $\frac{x}{x-1}$ è $\begin{matrix} +++ & --- & +++ \\ \circ & x & \rightarrow \end{matrix}$ e quindi

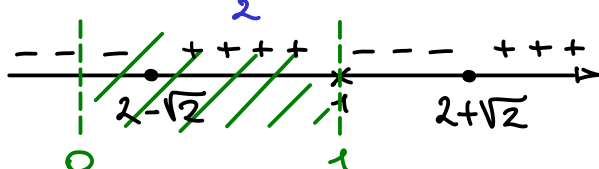
$$\begin{cases} x \leq 0 \vee x > 1 \\ x-2 < \frac{x}{x-1} \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x-2 < -\frac{x}{x-1} = \frac{x}{1-x} > 0 \end{cases}$$

$$x-2 - \frac{x}{x-1} = \frac{x^2 - 4x + 2}{x-1} < 0$$

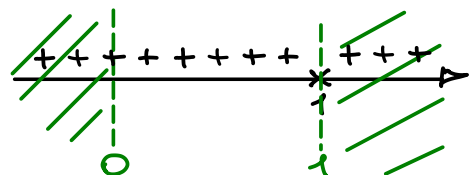
$$(1-x)(x-2) < x$$

$$x^2 - 2x + 2 > 0 \quad \Delta = 4 - 8 < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$



$$x \in (-\infty, 0] \cup (1, 2+\sqrt{2})$$



$$x \in (0, 1)$$

Quindi: $A = (-\infty, 1) \cup (1, 2+\sqrt{2})$ e

$$\inf(A) = -\infty \quad \sup(A) = 2+\sqrt{2}$$

A non ha né massimo né minimo.

PROPRIETA' CARATTERISTICHE DEL SUP

$$\sup(A) = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A : M < a$$

dato un qualunque numero reale M
esiste un elemento di A più grande di M

$$\sup(A) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A \quad a \leq l & l \text{ è un maggiorante} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : l - \varepsilon < a \end{cases}$$

ogni numero più piccolo di l
non è un maggiorante di A

PROPRIETA' CARATTERISTICHE DELL'INF

$$\inf(A) = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A : a < M$$

dato un qualunque numero reale M
esiste un elemento di A più piccolo di M

$$\inf(A) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A \quad l \leq a & l \text{ è un minorante} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a < l + \varepsilon \end{cases}$$

ogni numero più grande di l
non è un minorante di A

OSSERVAZIONE

Vale la seguente disuguaglianza (AG)

$$\forall a, b \geq 0 \quad \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{media aritmetica}} \geq \underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{media geometrica}}$$

$$\text{infatti } (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$

L'uguaglianza vale solo se $a = b$.

ESEMPI

- Determinare sup/inf/max/min di

$$A = \left\{ x + \frac{5}{x} : x \in \mathbb{R}^+ \right\}. \quad \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$$

Notiamo che $\forall M > 0$, $M < M + \left(\frac{5}{M}\right)_0 \in A$

e quindi $\sup(A) = +\infty$. A non ha massimo.

Inoltre

$$\forall x > 0 \quad x + \frac{5}{x} \stackrel{AG}{\geq} 2\sqrt{x \cdot \frac{5}{x}} = 2\sqrt{5} \text{ e vale l' = se } x = \sqrt{5}$$

Quindi $2\sqrt{5}$ è un minorante e appartiene ad A.

Così $\inf(A) = \min(A) = 2\sqrt{5}$ irrazionale $\in (4, 5)$.

- Determinare sup/inf/max/min di

$$A = \left\{ n + \frac{5}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

Si ha che $\forall M > 0$ $M < n + \frac{5}{n} \in A$ con n intero $> M$

e quindi $\sup(A) = +\infty$. A non ha massimo.

Come prima

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad n + \frac{5}{n} \stackrel{AG}{\geq} 2\sqrt{n \cdot \frac{5}{n}} = 2\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$$

$2\sqrt{5}$ è un minorante ma $2\sqrt{5} \notin A \subseteq \mathbb{Q}$.

$2\sqrt{5}$ è il più grande dei minoranti? NO!

$$A = \left\{ 6, \frac{9}{2}, \frac{14}{3}, \frac{21}{4}, 6, \dots \right\}$$

$\frac{9}{2} \in A$ ed è minore di $6, \frac{14}{3}, \frac{21}{4}$ inoltre

$$\forall n \geq 5 \quad \underbrace{n}_{\geq 5} + \underbrace{\frac{5}{n}}_{> 0} > 5 > \frac{9}{2}.$$

Così $\inf(A) = \min(A) = \frac{9}{2}$.

• Determinare sup/inf/max/min di

$$A = \left\{ \frac{2n^2 - 1}{(n+1)^2} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ -1, \frac{1}{4}, \frac{7}{9}, \frac{17}{16}, \dots \right\}.$$

min(A) = inf(A) = -1? SÌ

-1 ∈ A e ∀ n ≥ 1 $\frac{2n^2 - 1}{(n+1)^2} > 0 > -1$.

sup(A)? Esiste max(A)?

Verifichiamo che 2 è un maggiorante di A

$$\frac{2n^2 - 1}{(n+1)^2} \leq 2 \iff 2n^2 - 1 \leq 2n^2 + 4n + 2 \iff -\frac{3}{4} \leq n \in \mathbb{N}$$

VERO

Inoltre non vale mai l' = e 2 ∉ A.

Verifichiamo che 2 è il più piccolo dei maggioranti di A:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : 2 - \varepsilon < a$$

ovvia

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : 2 - \frac{2n^2 - 1}{(n+1)^2} < \varepsilon.$$

osserviamo che

$$2 - \frac{2n^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{2n^2 + 4n + 2 - 2n^2 + 1}{(n+1)^2} < \frac{4(n+1)}{(n+1)^2} < \varepsilon$$

Vale se $\frac{4}{\varepsilon} - 1 < n$

e quindi basta prendere un intero n maggiore di $\frac{4}{\varepsilon} - 1$ (esiste perché sup(ℕ) = +∞).

Possiamo così concludere che

$$\sup(A) = 2 \text{ e } A \text{ non ha massimo.}$$