ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 3

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ Risolvere $|x-1|-3 \leq \sqrt{x+2}$.

$\sqrt{\ }$ $\qquad |x-1|$

$$\begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ 1-x-3 \leq \sqrt{x+2} \end{cases} \cup \begin{cases} 1 \leq x \\ x-1-3 \leq \sqrt{x+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ \underbrace{-2-x}_{\leq 0} \leq \underbrace{\sqrt{x+2}}_{\geq 0} \end{cases} \cup \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ \underbrace{x-4}_{\leq 0} \leq \underbrace{\sqrt{x+2}}_{\geq 0} \end{cases} \cup \begin{cases} 4 < x \\ \underbrace{x-4}_{\geq 0} \leq \underbrace{\sqrt{x+2}}_{\geq 0} \end{cases}$$

$x \in [-2,1)$ $\qquad$ $x \in [1,4]$ $\qquad$ $\Updownarrow \ (\ )^2$

$$\begin{cases} 4 < x \\ (x-4)^2 \leq x+2 \end{cases}$$

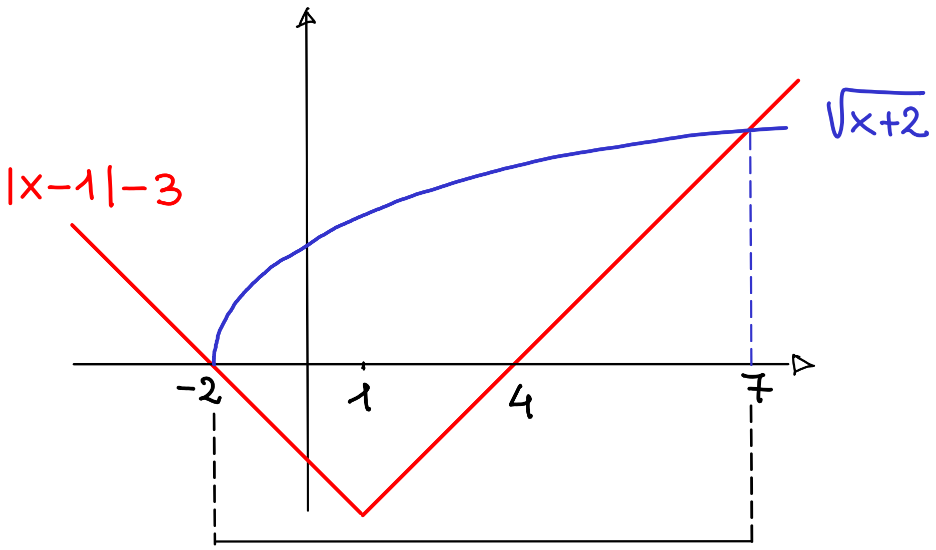
$x \in (4,7]$

$$(x-4)^2 \leq x+2$$
$$x^2-8x+16-x-2 \leq 0$$
$$x^2-9x+14 \leq 0$$
$$(x-2)(x-7) \leq 0 \qquad x \in [2,7]$$

Quindi l'insieme delle soluzioni è

$$[-2,1) \cup [1,4] \cup (4,7] = [-2,7].$$

Interpretazione grafica della disuguaglianza:



$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ Disegnare il grafico di $\arcsin(\sin(x))$ nell'intervallo $[-\pi,\pi]$.

Dato che $\arcsin(x)$ è l'inversa di $\sin(x)$ ristretta a $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, abbiamo che

1) Se $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ allora $\arcsin(\sin(x))=x$

2) Se $x\in(\frac{\pi}{2},\pi]$ allora

$$\arcsin(\sin(x))=\arcsin(\sin(\underbrace{\pi-x}_{\in[0,\frac{\pi}{2})}))=\pi-x$$

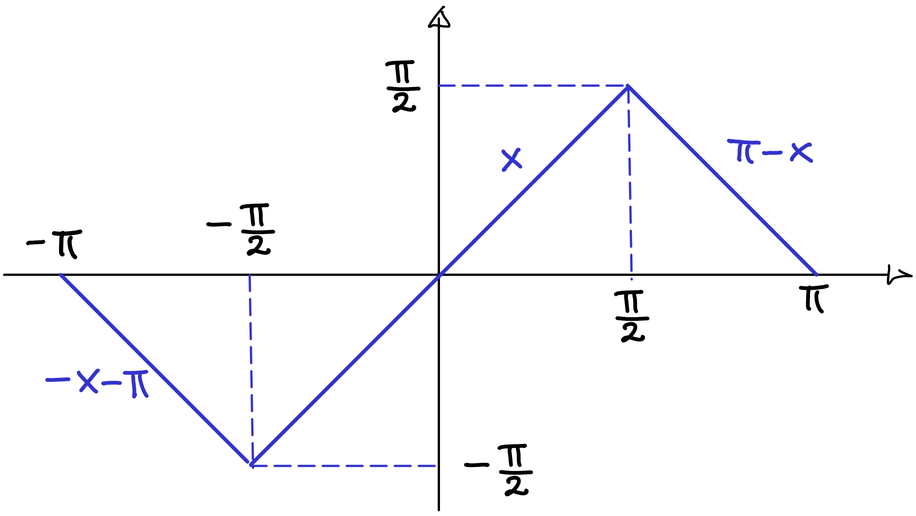
3) Se $x\in[-\pi,-\frac{\pi}{2})$ allora

$$\arcsin(\sin(x))=-\arcsin(\sin(\underbrace{-x}_{\in(\frac{\pi}{2},\pi]}))=-(\pi-(-x))$$

$$=-x-\pi$$

Così

$$\arcsin(\sin(x))=\begin{cases} x & \text{se } x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ \pi-x & \text{se } x\in(\frac{\pi}{2},\pi] \\ -x-\pi & \text{se } x\in[-\pi,-\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$



$f(x)=\arcsin(\sin(x))$ è periodica con periodo $T=2\pi$.

f è dispari: $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(-x)=\arcsin(\sin(-x))=\arcsin(-\sin(x))=-\arcsin(\sin(x))=-f(x)$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ Determinare il dominio D di

$$f(x)=\sqrt{\log\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)}$$ la base di log è e

e $f(D)=\{f(x) : x\in D\}$. immagine di f

La funzione $f : D \to f(D)$ è biunivoca?

Nel caso trovare f^{-1}.

Per individuare D dobbiamo imporre che tutti gli argomenti delle funzioni elementari utilizzate stiano nei rispettivi domini.

$$\begin{cases} x+1\neq 0 & \text{denominatore} \neq 0 \\ \dfrac{2x+1}{x+1}>0 & \text{argomento del logaritmo} >0 \\ \log\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)\geq 0 & \text{argomento della radice quadrata} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\neq -1 \\ \dfrac{2x+1}{x+1}\geq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\neq -1 \\ \dfrac{\cancel{2}x+\cancel{1}-\cancel{x}-\cancel{1}}{x+1}\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc} ++ & & ----- & & +++ \\ & -1 & & 0 & \end{array}$$

e dunque $D=(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$.

Per $y\in\mathbb{R}$ provo a risolvere l'equazione $y=f(x)$ rispetto a x:

$$\underset{y\geq 0}{y^2=}\log\left(\frac{2x+1}{x+1}\right), \quad e^{y^2}=\frac{2x+1}{x+1}, \quad e^{y^2}x+e^{y^2}=2x+1$$

$$(e^{y^2}-2)x=1-e^{y^2}, \quad x\overset{y\neq\sqrt{\log(2)}}{=}\frac{1-e^{y^2}}{e^{y^2}-2}$$ soluzione unica

Così per $y\in[0,\sqrt{\log(2)})\cup(\sqrt{\log(2)},+\infty)=f(D)$ l'equazione $y=f(x)$ ha un'unica soluzione.

$f : D\to f(D)$ è biunivoca e $f^{-1}(x)=\dfrac{1-e^{x^2}}{e^{x^2}-2}$.

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Dato $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ sia $P(n)$ una proposizione che può essere vera o falsa al variare di n.

TEOREMA (PRINCIPIO DI INDUZIONE) Se

1) $P(n_0)$ è vera (PASSO BASE)
2) $\forall n \geq n_0$ $\underbrace{P(n)}_{\text{Ipotesi induttiva}} \Rightarrow P(n+1)$ (PASSO INDUTTIVO)

allora $P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$.

ESEMPIO $1+2+\dots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $P(n)$

Verifica per induzione.

Passo base. Per $n=1$, $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ VERO

Passo induttivo. Per $n \geq 1$,

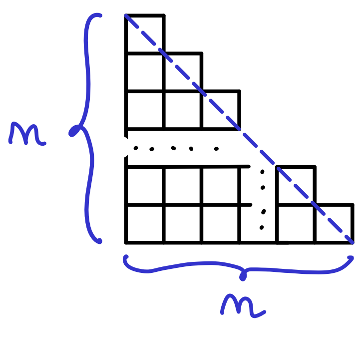
$$\sum_{k=1}^{n+1} k \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad P(n+1)$$

Abbiamo che

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{P(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{VERO}$$

OSSERVAZIONE.



Interpretazione geometrica

$$\sum_{k=1}^{n} k = \underbrace{\frac{n \cdot n}{2}}_{\text{Area}} + \underbrace{n \cdot \frac{1}{2}}_{\text{Area}} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $\forall n \geq 4 \quad 2^n > n+10.$

Verifica per induzione.

Passo base. Per $n=4$, $2^4 = 16 \overset{?}{>} 14 = 4+10$ VERO

Passo induttivo. Per $n \geq 1$,

$$2^{n+1} \overset{?}{>} (n+1)+10 \qquad P(n+1)$$

Abbiamo che

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{P(n)}{>} 2(n+10) = 2n+20 > n+11 \qquad \text{VERO}$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI)

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, \ \forall x \geq -1 \quad (1+x)^n \geq 1+nx.$$

dim. Per induzione rispetto a n.

Passo base. Per $n=1$, $(1+x)^1 \overset{?}{\geq} 1+1\cdot x$ VERO

Passo induttivo. Per $n \geq 1$

$$(1+x)^{n+1} \overset{?}{\geq} 1+(n+1)\cdot x \qquad P(n+1)$$

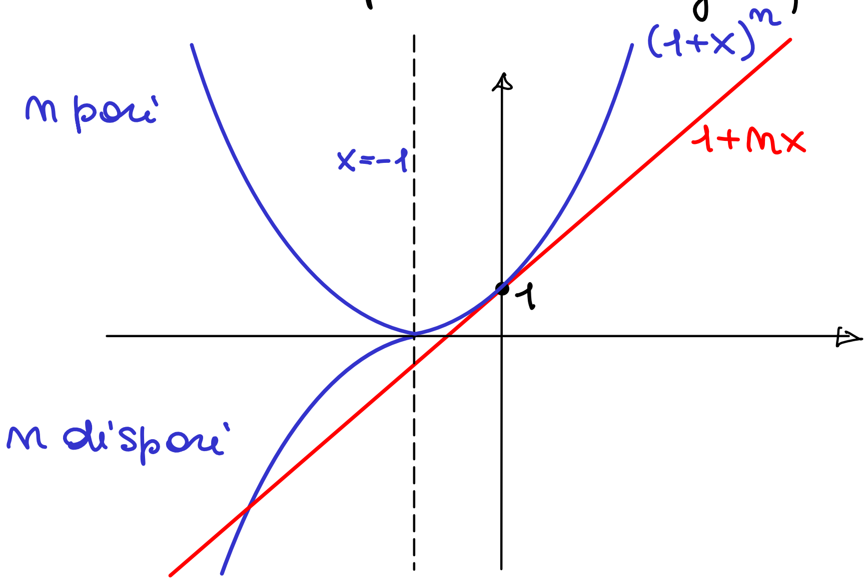
Abbiamo che

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^1}_{\substack{\geq 0 \\ \uparrow \\ x \geq -1}} \cdot (1+x)^n \overset{P(n)}{\geq} (1+x)(1+nx) \overset{?}{\geq} 1+(n+1)x$$

$$(1+x)(1+nx) = \underbrace{1+x+nx}_{=1+(n+1)x} + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \qquad \text{VERO}$$

$\square$

OSSERVAZIONE. Interpretazione grafica



Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ n\cdot(n-1)\cdots 1 & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

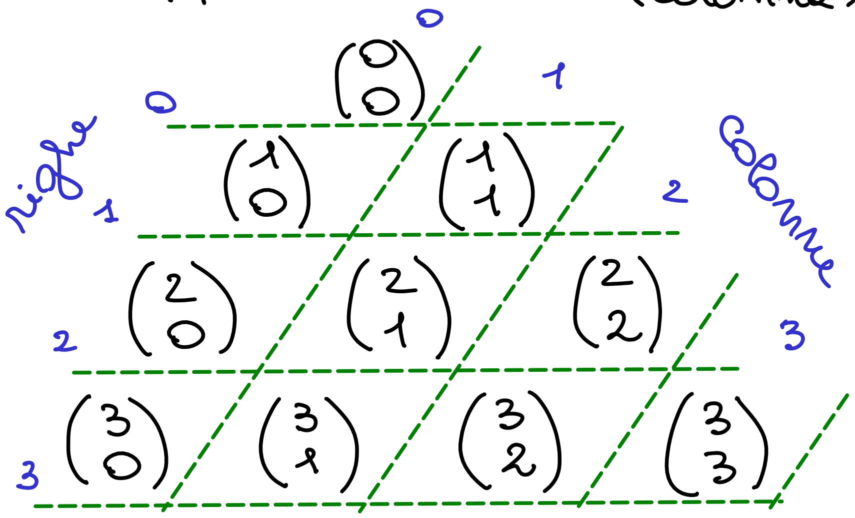
indica il FATTORIALE di n.

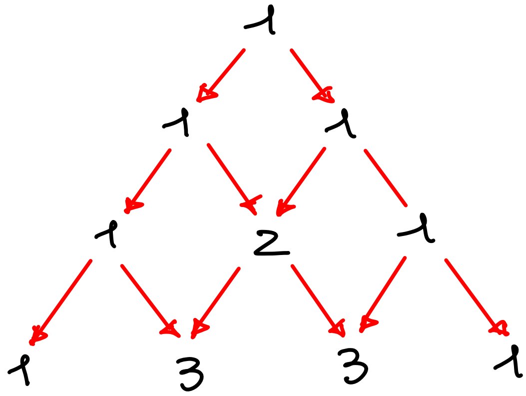
Per k intero tale che $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ fattori}}}{k!}$$

indica il COEFFICIENTE BINOMIALE n su k.

Rappresentazione $\left(\begin{smallmatrix}\text{riga}\\ \text{colonna}\end{smallmatrix}\right)$





Esempio di calcolo

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot \cancel{4}^{\,2}\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot\cancel{2}} = 10.$$

Proprietà

1) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$

2) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$= \frac{n!}{k!(n-k+1)!}\left(k + (n-k+1)\right) = \binom{n+1}{k}$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (POTENZA DI UN BINOMIO)

$$\forall a,b\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}^+\quad (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$

dim. Per induzione.

Passo base. Per $n=1$, $(a+b)^1 \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^k b^{1-k} = 1\cdot a^0 b^1 + 1\cdot a^1 b^0$ VERO

Passo induttivo. Per $n\geq 1$,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n \overset{P(n)}{=} (a+b)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

$$\boxed{k=k+1}\quad = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\Bigg(\underbrace{\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}}_{\binom{n+1}{k}}\Bigg)a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$$

$P(n+1)$ è VERA!

$\square$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ Per $n=4$:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^0b^4 + \binom{4}{1}a^1b^3 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^3b^1 + \binom{4}{4}a^4b^0$$

$$= b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + a^4.$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$