ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 2

INTRODUZIONE ALLE FUNZIONI

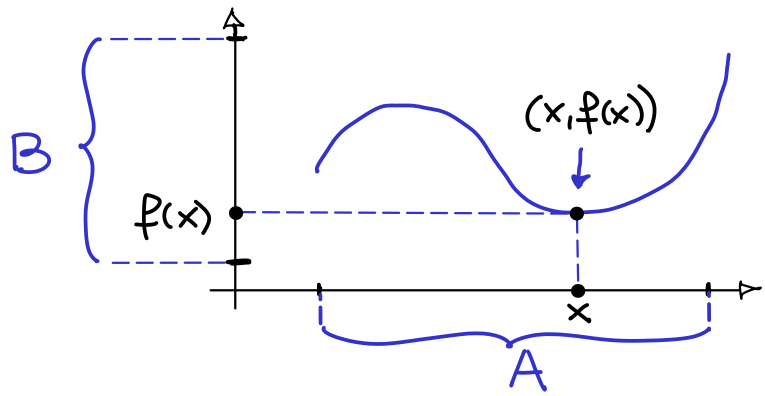
Una FUNZIONE f da un insieme A ad un insieme B è una corrispondenza che ad ogni $x \in A$ associa $f(x) \in B$:

$$f : A \to B$$

Se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ allora f si dice DI VARIABILE REALE A VALORI REALI. Il GRAFICO di f è l'insieme

$$\{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}_{\text{prodotto cartesiano}}$$

con rappresentazione "grafica":

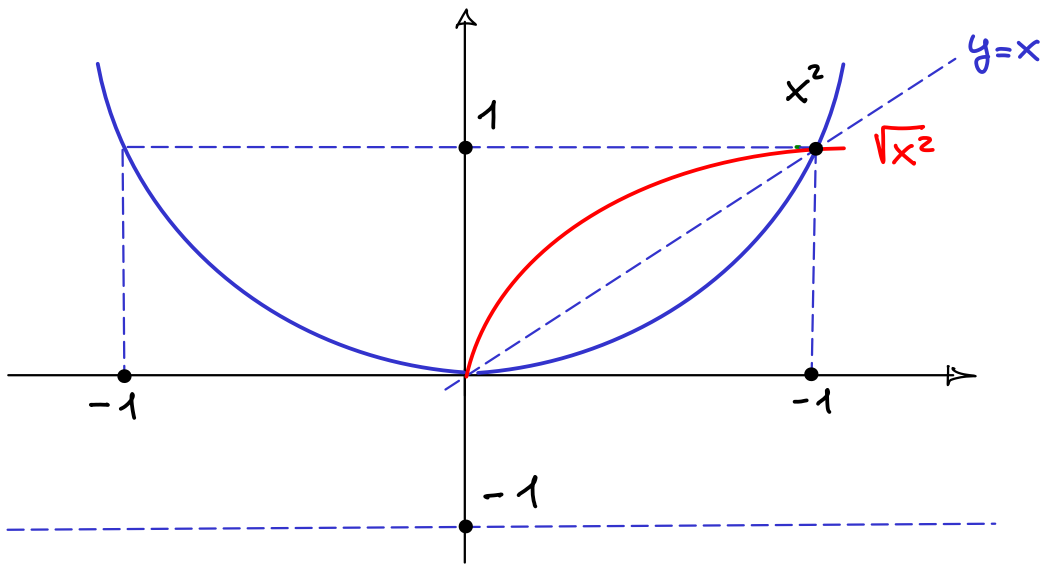


Notazioni e definizioni:

- f si dice INIETTIVA in A se
$$\forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$
- f si dice SURIETTIVA su B se
$$\forall y \in B \ \exists x \in A : \ y = f(x).$$
- f si dice BIUNIVOCA da A a B
$$\forall y \in B \ \underbrace{\exists!}_{\text{ESISTE ED È UNICO}} x \in A : \ y = f(x).$$
f è iniettiva e suriettiva

• Se $f: A \to B$ è biunivoca allora si dice INVERTIBILE e esiste una funzione detta INVERSA $f^{-1}: B \to A$ tale che
$\forall x \in A \quad f^{-1}(f(x)) = x$ e $\forall y \in B \quad f(f^{-1}(y)) = y$.

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ Consideriamo $f(x) = x^2$



1) Se $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$ allora
f non è iniettiva perché $(-1)^2 = (1)^2 = 1$,
f non è suriettiva perché l'equazione $x^2 = -1$ non ha soluzioni reali.

2) Se $A = \mathbb{R}$ e $B = [0, +\infty)$ allora
f non è iniettiva perché $(-1)^2 = (1) = 1$,
f è suriettiva perché $\forall b \in B$ l'equazione $x^2 = b$ ha almeno una soluzione reale:
0 se $b = 0$ e $\pm\sqrt{b}$ se $b > 0$.

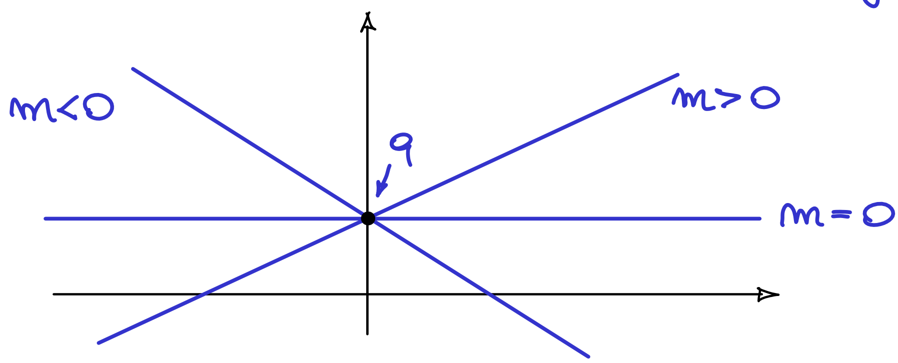
3) Se $A = B = [0, +\infty)$ allora f è biunivoca e la funzione inversa è $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$.
D: dominio di definizione

- f è (STRETTAMENTE) CRESCENTE in $A \subseteq D$ se $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \underset{(<)}{\leq} f(x_2)$.
- f è (STRETTAMENTE) DECRESCENTE in $A \subseteq D$ se $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \underset{(>)}{\geq} f(x_2)$.
- f è PARI se $\forall x \in D \ -x \in D$ e $f(x) = f(-x)$.
- f è DISPARI se $\forall x \in D \ -x \in D$ e $f(x) = -f(-x)$.
- f è PERIODICA se $\exists T > 0$ detto PERIODO tale che $\forall x \in D$ e $\forall k \in \mathbb{Z} \quad x + kT \in D$ e $f(x) = f(x + kT)$

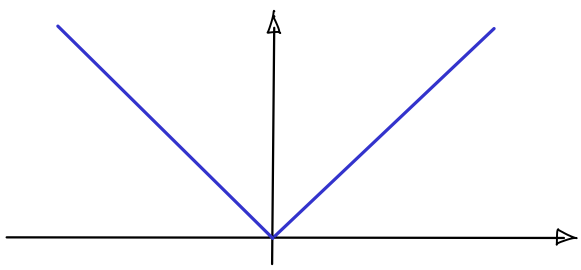
FUNZIONI ELEMENTARI

- FUNZIONE RETTA: $f(x) = mx + q$ con $m, q \in \mathbb{R}$
  $D = \mathbb{R}$
  m: coefficiente angolare



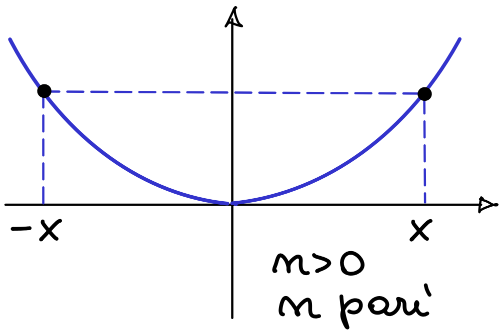
- FUNZIONE VALORE ASSOLUTO: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$
  $D = \mathbb{R}$

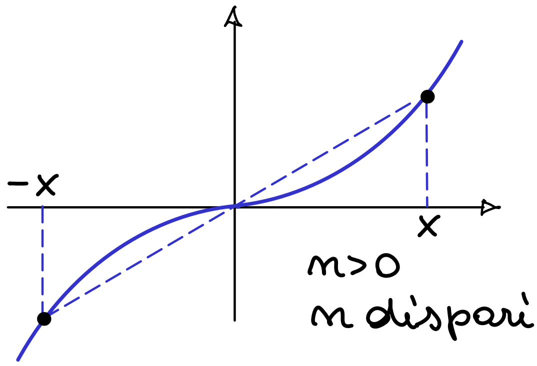
  $|x|$ è pari

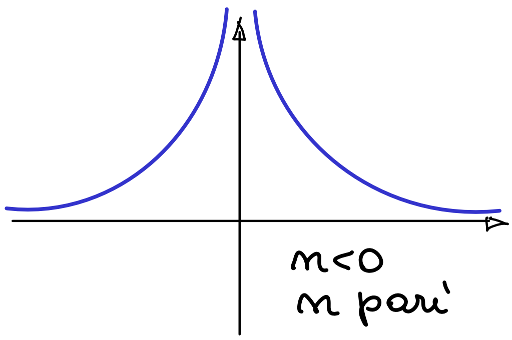


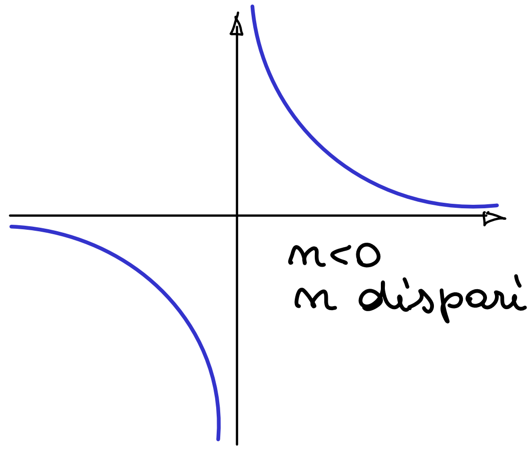
- FUNZIONE POTENZA INTERA: $f(x)=x^n$ con $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$D=\mathbb{R}$ se $n>0$ e $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ se $n<0$



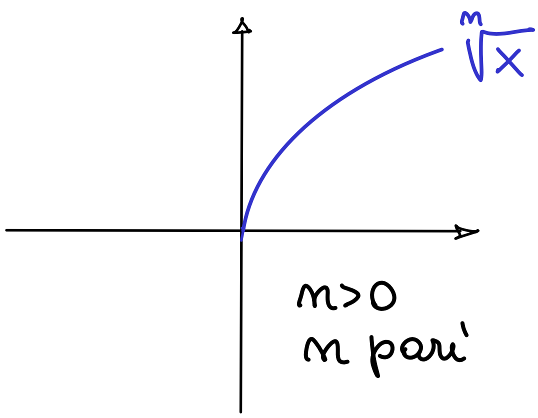


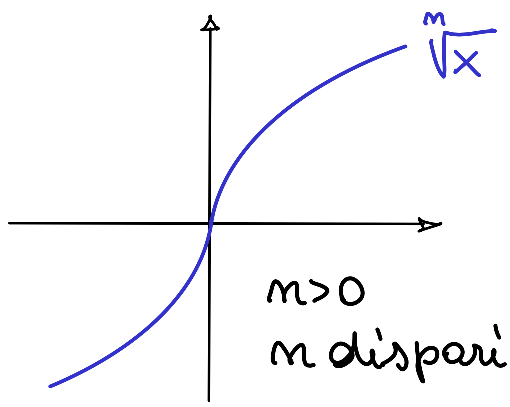




- FUNZIONE RADICE N-SIMA: $f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{1/n}$ con $n\in\mathbb{N}^+$

$D=[0,+\infty)$ se n è pari, $D=\mathbb{R}$ se n è dispari





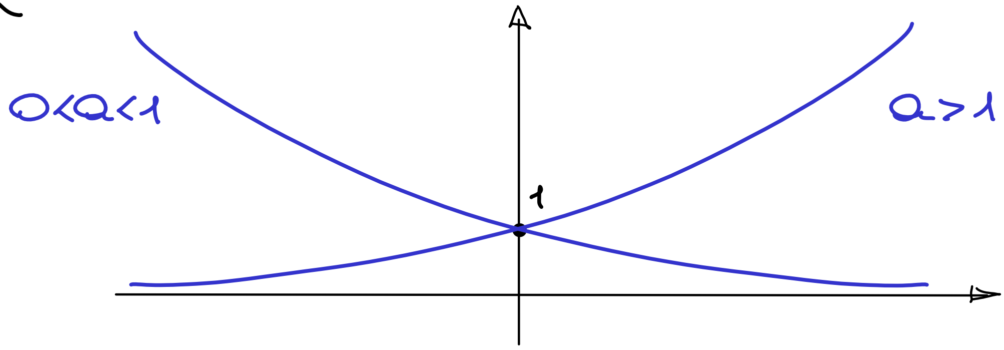
OSSERVAZIONI

1) Se n è pari: $\forall x\geq 0$ $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$ e $\forall x\in\mathbb{R}$ $\sqrt[n]{x^n}=|x|$

2) Se n è dispari: $\forall x\in\mathbb{R}$ $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=\sqrt[n]{x^n}=x$

• FUNZIONE ESPONENZIALE: $f(x)=a^x$ con $a>0$ e $a\neq 1$

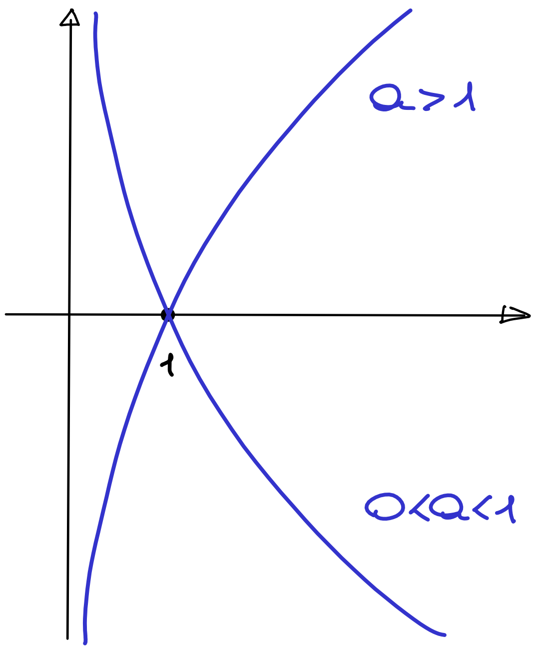
$D=\mathbb{R}$



Proprietà: $a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$ $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$.

• FUNZIONE LOGARITMO: $f(x)=\log_a(x)$ con $a>0$ e $a\neq 1$

$D=(0,+\infty)$



Proprietà: $\log_a(x_1\cdot x_2)=\log_a(x_1)+\log_a(x_2)$ $\forall x_1,x_2>0$

$\log_a(x^\alpha)=\alpha\log_a(x)$ $\forall x>0$

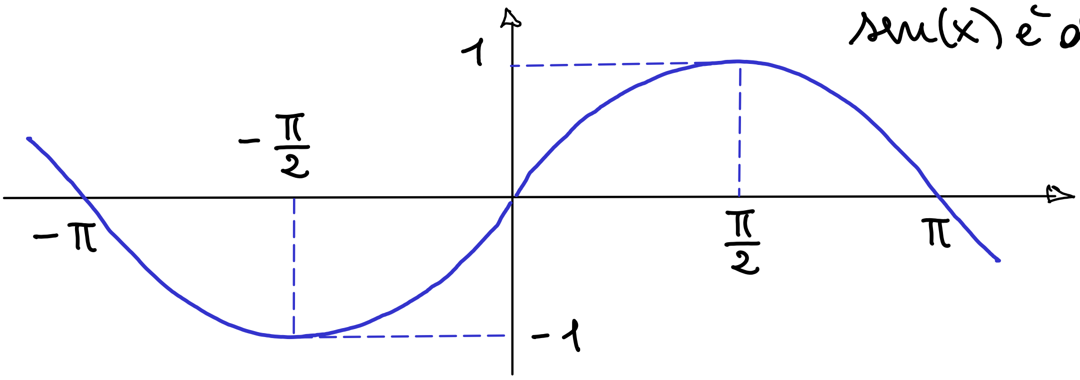
OSSERVAZIONE a^x e $\log_a(x)$ sono una inversa dell'altra

$\forall x\in\mathbb{R}$ $\log(a^x)=x$ e $\forall x>0$ $a^{\log_a(x)}=x$.

• FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

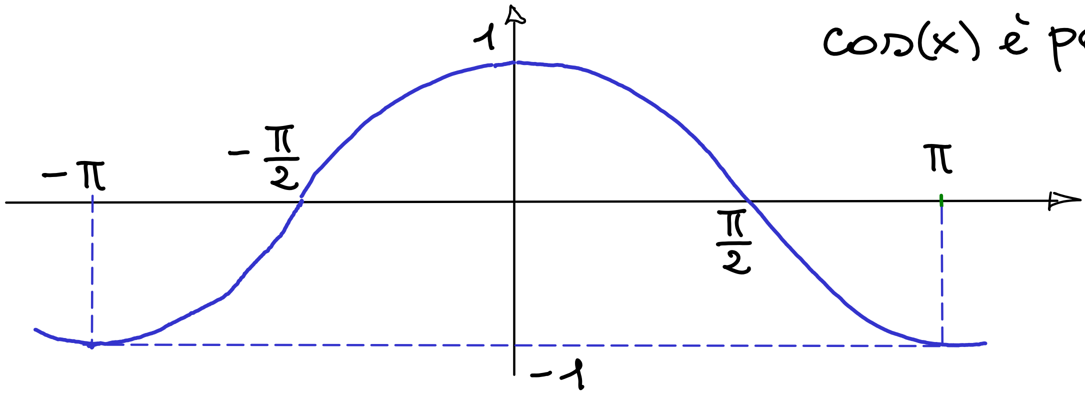
$f(x) = \text{sen}(x)$, $D = \mathbb{R}$, $T = 2\pi$

sen(x) è dispari



$f(x) = \cos(x)$, $D = \mathbb{R}$, $T = 2\pi$

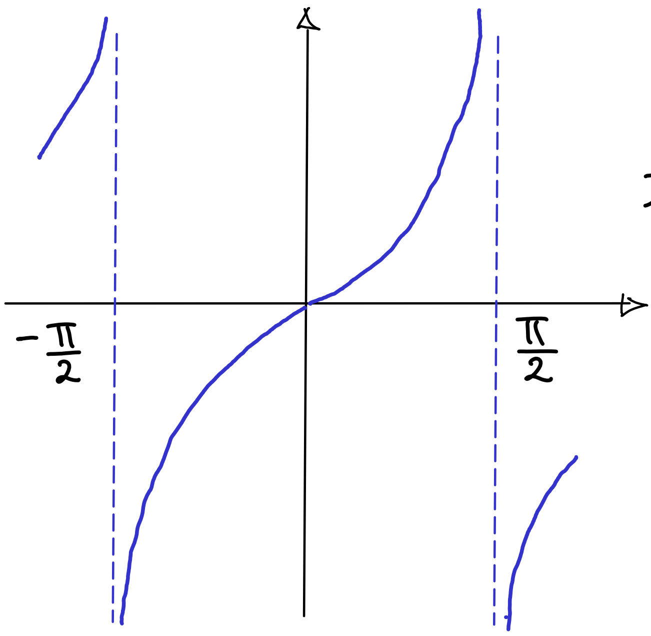
cos(x) è pari



Proprietà: $\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) - \text{sen}(x_1)\,\text{sen}(x_2)$$
$$\text{sen}(x_1 + x_2) = \text{sen}(x_1)\cos(x_2) + \cos(x_1)\,\text{sen}(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

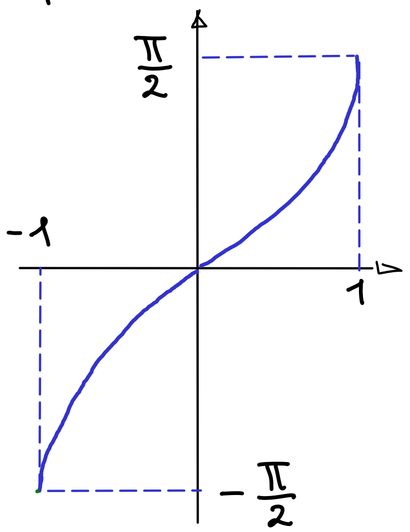
$f(x) = tg(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$, $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$, $T = \pi$



tg(x) è dispari

• FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

$f(x) = \arcsin(x)$, $D = [-1, 1]$

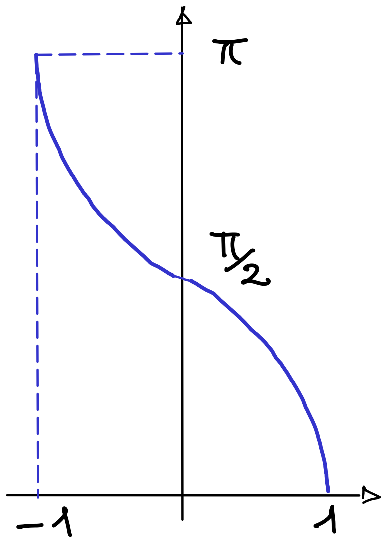


$\arcsin(x)$ è l'inversa della funzione biunivoca $\sin(x) : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$

$\arcsin(x)$ non è periodica

$\arcsin(x)$ è dispari

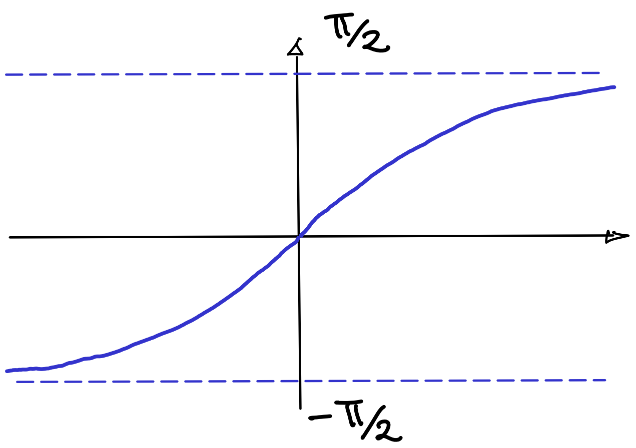
$f(x) = \arccos(x)$, $D = [-1, 1]$



$\arccos(x)$ è l'inversa della funzione biunivoca $\cos(x) : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$

$\arccos(x)$ non è periodica

$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $D = \mathbb{R}$



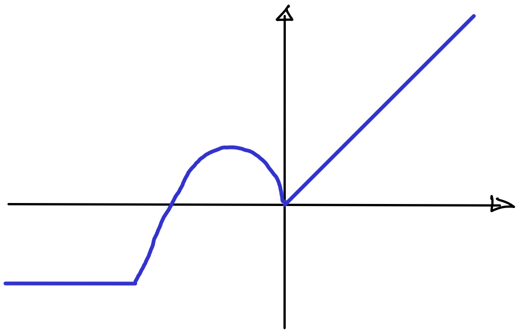
$\operatorname{arctg}(x)$ è l'inversa della funzione biunivoca $\operatorname{tg}(x) : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\operatorname{arctg}(x)$ non è periodica

$\operatorname{arctg}(x)$ è dispari

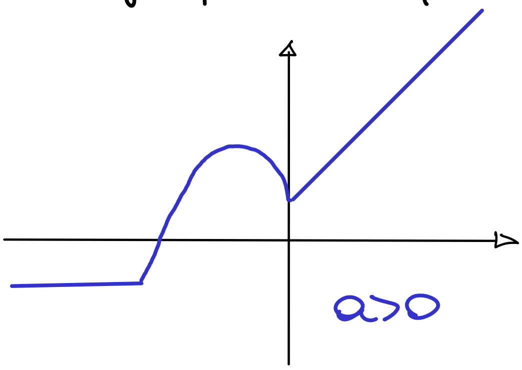
OPERAZIONI SUI GRAFICI

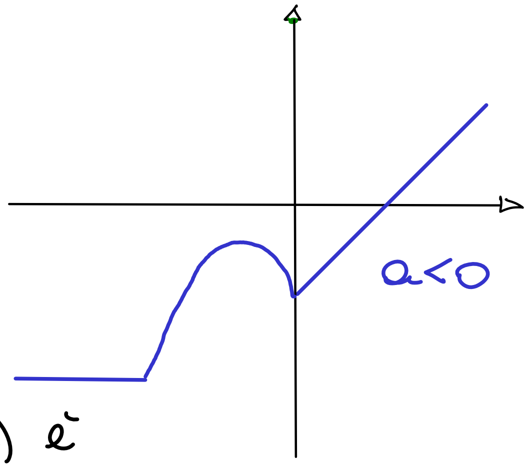
Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con grafico



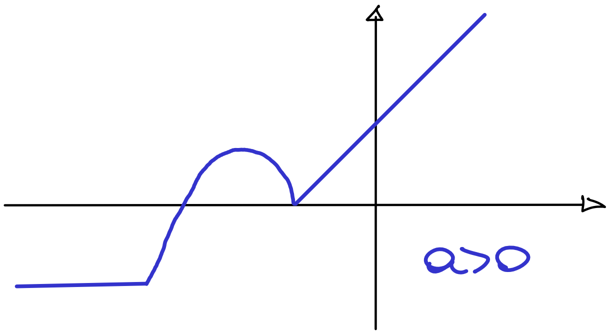
allora

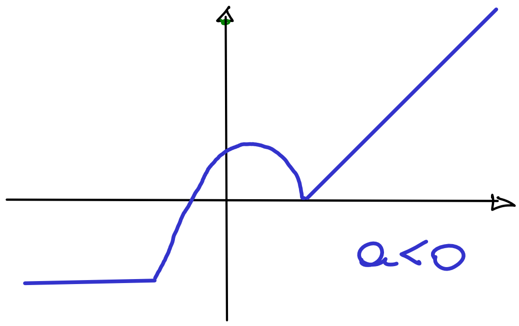
1) il grafico di $f(x)+a$ è



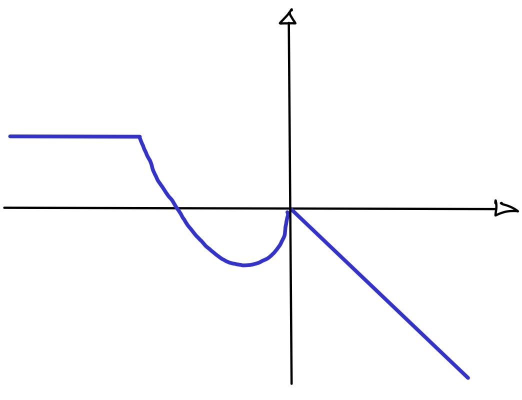


2) il grafico di $f(x+a)$ è

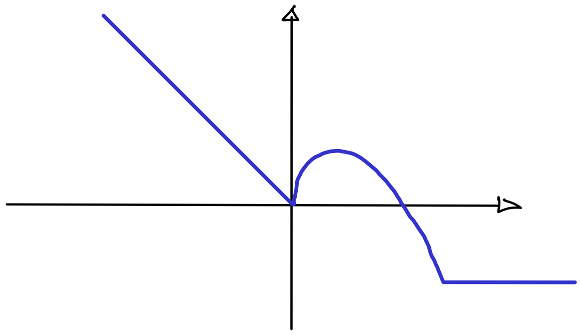




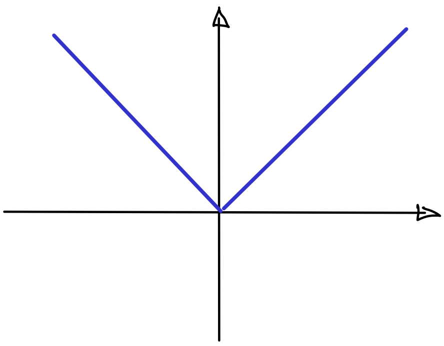
3) il grafico di $-f(x)$ è



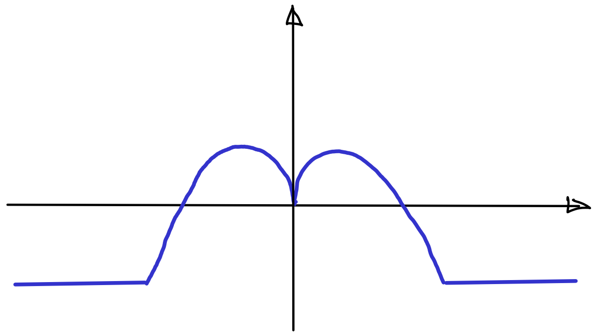
4) il grafico di $f(-x)$ è



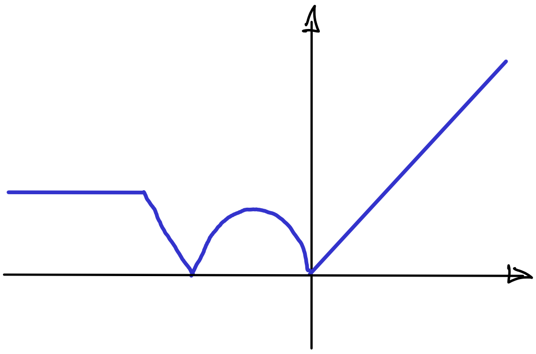
5) il grafico di $f(|x|)$ è



6) il grafico di $f(-|x|)$ è



7) il grafico di $|f(x)|$ è



$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = ||x-2|-1|.$$