Analisi Matematica 1
Foglio di esercizi n. 11
SOLUZIONI

Esercizio 1. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = |3 - x|e^{1/(2-x)}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di convessità/concavità ed eventuali flessi.

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Dato che $f(x) = |g(x)|$, consideriamo anche la funzione $g(x) = (x-3)e^{1/(2-x)}$. Per $x \to \pm\infty$ si ha che

$$g(x) = (x-3)(1 + 1/(2-x) + o(1/x)) = x - 3 - 1 + o(1) = x - 4 + o(1).$$

Quindi la funzione f, per $x \to +\infty$ ha un asintoto obliquo $y = x - 4$ e per $x \to -\infty$ ha un asintoto obliquo $y = -x + 4$. Inoltre $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$.
Per $x \neq 2$, la derivata prima di g è

$$g'(x) = e^{1/(2-x)} \cdot \frac{x^2 - 3x + 1}{(x-2)^2}.$$

Notiamo $g' = f'$ per $x > 3$ e $g' = -f'$ per $x < 3$. Il punto $x = 3$ è un punto angoloso per la funzione f:

$$f'_-(3) = -g'(3) = -1/e \quad \text{e} \quad f'_+(3) = g'(3) = 1/e.$$

Si noti che $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = 0$.
Inoltre si ha che f è crescente in $[(3-\sqrt{5})/2, 2)$, in $(2, (3+\sqrt{5})/2]$ e in $[3, +\infty)$. La funzione f è decrescente in $(-\infty, (3-\sqrt{5})/2]$ e in $[(3+\sqrt{5})/2, 3]$. Il punto $x = (3+\sqrt{5})/2 \in (2,3)$ è di massimo relativo, mentre il punto $x = (3-\sqrt{5})/2 \in (0,1)$ è di minimo relativo. Non ci sono punti di massimo assoluto mentre $x = 3$ è un punto di minimo assoluto con $f(3) = 0$.
Per $x \neq 2$, la derivata seconda di g è

$$g''(x) = e^{1/(2-x)} \cdot \frac{3x - 7}{(x-2)^4}.$$

Quindi f è convessa in $(-\infty, 2)$, in $(2, 7/3]$ e in $[3, +\infty)$, ed è concava in $(7/3, 3]$. Il punto $x = 7/3 \approx 2.333$ è l'unico punto di flesso.

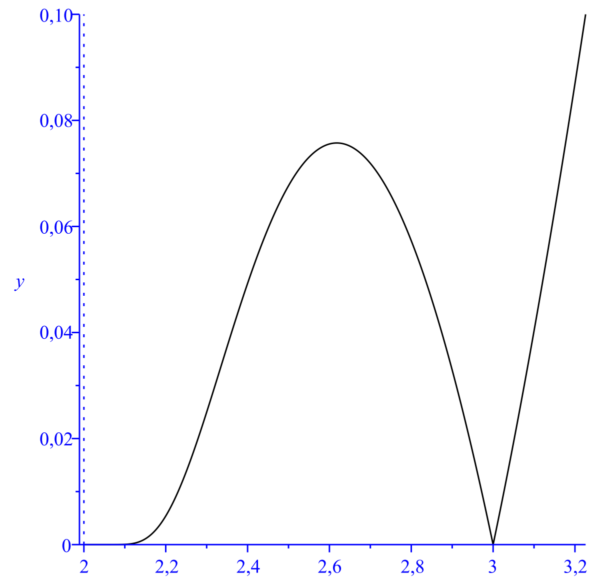

Grafico di $f(x) = |3 - x|e^{1/(2-x)}$ in $[2, 3.2]$

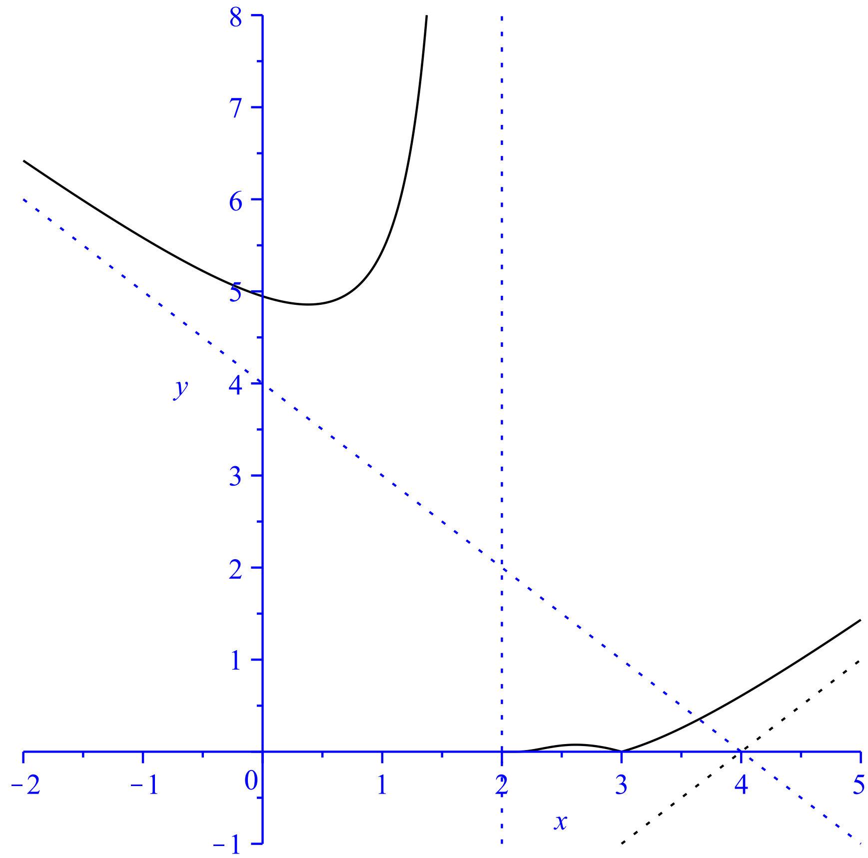

Grafico di $f(x) = |3 - x|e^{1/(2-x)}$

Esercizio 2.a. Calcolare
$$\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\log^2(\sin^2(x))\,dx.$$

Ricordando che $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, poniamo $t = \sin^2(x)$, allora $dt = 2\sin(x)\cos(x)dx$ e

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\log^2(\sin^2(x))\,dx &= \int_0^{1/2} \log^2(t)\,dt \\
&= \Big[t\log^2(t)\Big]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} t\,d(\log^2(t)) \\
&= \frac{\log^2(2)}{2} - 2\int_0^{1/2} \log(t)\,dt \\
&= \frac{\log^2(2)}{2} - 2\Big[t\log(t) - t\Big]_0^{1/2} \\
&= \frac{\log^2(2)}{2} + \log(2) + 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 2.b. Calcolare
$$\int_1^{+\infty} \frac{\log\left(x^2 - x\right)}{x^3}\,dx.$$

Integrando per parti abbiamo

$$\int \frac{\log(x^2 - x)}{x^3}\,dx = \int \log(x^2 - x)\,d(-\frac{1}{2x^2}) = -\frac{\log(x^2 - x)}{2x^2} + \int \frac{x - \frac{1}{2}}{x^2(x^2 - x)}\,dx.$$

La funzione razionale da integrare si decompone come

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{x^2(x^2 - x)} = \frac{x - \frac{1}{2}}{x^3(x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x - 1}$$

dove si trova che
$$D = \lim_{x\to 1} \frac{x - \frac{1}{2}}{x^3} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad C = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{1}{2}}{x - 1} = \frac{1}{2}.$$

Ponendo $x = 1/2$ e $x = -1$, otteniamo altre due equazioni, rispettivamente $2A + 4B = -3$ e $-A + B = 0$ da cui otteniamo $A = B = -1/2$. Dunque

$$\int \frac{x - \frac{1}{2}}{x^2(x^2 - x)}\,dx = \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{x - 1}{x}\right| + c.$$

Infine

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{\log\left(x^2-x\right)}{x^3} &= \Big[-\frac{\log(x^2-x)}{2x^2}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{2}\log\left(\frac{x-1}{x}\right)\Big]_1^{+\infty} \\
&= 0-\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to1^+}\left(-\frac{\log\left(x^2-x\right)}{x^2}+\log\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)+1-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to1^+}\left(-\frac{\log\left(x-1\right)}{x^2}+\log(x-1)\right)-\frac{1}{4} \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to1^+}\left(\frac{(x^2-1)\log(x-1)}{x^2}\right)-\frac{1}{4} \\
&= 0-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.a. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log^3(x)}{(x-1)^a \log^5(1+x^x)}\, dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{\log^3(x)}{(x-1)^a \log^5(1+x^x)}.$$

Nell'intervallo $(1, +\infty)$, i punti da indagare sono due: 1^+ e $+\infty$.
Per $x \to 1^+$, $t = x - 1 \to 0^+$ e

$$f(x) \sim \frac{\log^3(1+t)}{t^a \log^5(2)} \sim \frac{t^3}{t^a \log^5(2)} \sim \frac{1}{\log^5(2)} \cdot \frac{1}{t^{a-3}}.$$

Così, per la convergenza, $a - 3 < 1$ ossia $a < 4$.
Per $x \to +\infty$ abbiamo che

$$f(x) \sim \frac{\log^3(x)}{x^a \log^5(x^x)} = \frac{\log^3(x)}{x^a \cdot x^5 \log^5(x)} = \frac{1}{x^{a+5} \log^2(x)}.$$

Quindi, per la convergenza, $a + 5 \geq 1$ ossia $a \geq -4$ (si noti che l'esponente del logaritmo è $2 > 1$).
L'integrale improprio dato è convergente se e solo se $-4 \leq a < 4$.

Esercizio 3.b. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^8)}{x^a \log^2(1+x^3)}\, dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{\arctan(x^8)}{x^a \log^2(1+x^3)}.$$

Nell'intervallo $(0, +\infty)$, i punti da controllare sono due: 0^+ e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$,

$$f(x) \sim \frac{x^8}{x^a (x^3)^2} = \frac{1}{x^{a-2}}.$$

Quindi, per la convergenza, $a - 2 < 1$ ossia $a < 3$.
Per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{\pi/2}{x^a \log^2(x^3)} \sim \frac{\pi/2}{9} \cdot \frac{1}{x^a \log^2(x)}.$$

Così, per la convergenza, $a \geq 1$.

L'integrale improprio dato è convergente se e solo se $1 \leq a < 3$.

Esercizio 3.c. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(x)}{(1-\cos^3(x))^a}\,dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{\sin^2(x)}{(1-\cos^3(x))^a}$$

Nell'intervallo $(0, \pi/2)$, c'è solo un punto da controllare ossia 0^+ (si noti che per $x \to (\pi/2)^-$, $f(x) \to 1$).
Per $x \to 0^+$,

$$f(x) \sim \frac{x^2}{(1-(1-\frac{x^2}{2})^3)^a} \sim \frac{x^2}{(1-(1-\frac{3x^2}{2}))^a} = \frac{1}{(3/2)^a} \cdot \frac{x^2}{x^{2a}} = \frac{1}{(3/2)^a} \cdot \frac{1}{x^{2a-2}}.$$

Quindi, per l'integrabilità, $2a-2 < 1$ e l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $a < 3/2$.

Esercizio 3.d. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(\sqrt{\sin(x)})}{\sin^a(2x)\,\sqrt{\cos(x)}}\,dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{\arctan(\sqrt{\sin(x)})}{\sin^a(2x)\,\sqrt{\cos(x)}}.$$

Nell'intervallo $(0, \pi/2)$ dobbiamo fare l'analisi asintotica in 0^+ e in $(\pi/2)^-$.
Per $x \to 0^+$ abbiamo

$$f(x) \sim \frac{x^{1/2}}{(2x)^a} = \frac{1}{2^a} \cdot \frac{1}{x^{a-1/2}}.$$

Quindi, per l'integrabilità, $a - 1/2 < 1$, ossia $a < 3/2$.
Per $x \to (\pi/2)^-$, $t = \pi/2 - x \to 0^+$ e

$$f(x) \sim \frac{\pi/4}{\sin^a(\pi-2t)\,\sqrt{\sin(t)}} \sim \frac{\pi/4}{\sin^a(2t)\,t^{1/2}} \sim \frac{\pi/4}{2^a} \cdot \frac{1}{t^{a+1/2}}.$$

Per l'integrabilità, $a + 1/2 < 1$, ossia $a < 1/2$.
L'integrale improprio dato è convergente se e solo se $a < 1/2$.

Esercizio 4.a. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k^2+3k) - 2\log(k)}{(\log(\sqrt{k}+1))^{3a}}$$

al variare del parametro $a > 0$.

Per $k \to \infty$,

$$\begin{aligned}\frac{\log(k^2+3k) - 2\log(k)}{(\log(\sqrt{k}+1))^{3a}} &= \frac{\log(1+3/k)}{(\frac{1}{2}\log(k) + \log(1+1/\sqrt{k}))^{3a}} \\ &\sim \frac{3/k}{(\frac{1}{2}\log(k))^{3a}} = \frac{C}{k\log^{3a}(k)}.\end{aligned}$$

Così, per il confronto asintotico, la serie converge se e solo se $3a > 1$ ($\alpha = 1$, $\beta = 3a$) ossia se $a > 1/3$.

Esercizio 4.b. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4^k + k)a^{2k}}{3^k - 1}$$

al variare del parametro $a > 0$.

Per $k \to \infty$,

$$\frac{(4^k + k)a^{2k}}{3^k - 1} \sim \frac{4^k a^{2k}}{3^k} = \left(\frac{4a^2}{3}\right)^k.$$

Allora, per il confronto asintotico, la serie data converge se e solo se la serie geometrica $\sum_{k=1}^{\infty}(4a^2/3)^k$ è convergente ossia se $|4a^2/3| < 1$, da cui $|a| < \sqrt{3}/2$.

Esercizio 4.c. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k} + (-1)^k k^a}{k^a\sqrt{k}}$$

al variare del parametro $a > 0$.

La serie data non è convergente per nessun valore di $a > 0$. Infatti

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k} + (-1)^k k^a}{k^a\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = L + \infty = \infty$$

perché la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^a}$ è convergente per il criterio di Leibniz mentre $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$.

Esercizio 4.d. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^a + k^2}{k^{2a} + k^3}$$

al variare del parametro $a > 0$.

Per $k \to \infty$,

$$k^a + k^2 \sim \begin{cases} k^a & \text{se } a > 2 \\ 2k^2 & \text{se } a = 2 \\ k^2 & \text{se } 0 < a < 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad k^{2a} + k^3 \sim \begin{cases} k^{2a} & \text{se } a > 3/2 \\ 2k^3 & \text{se } a = 3/2 \\ k^3 & \text{se } 0 < a < 3/2 \end{cases}$$

Quindi, riordinando i vari casi,

$$\frac{k^a + k^2}{k^{2a} + k^3} \sim \begin{cases} \dfrac{k^a}{k^{2a}} = \dfrac{1}{k^a} & \text{se } a > 2 \\ \dfrac{2k^2}{k^4} = \dfrac{2}{k^2} & \text{se } a = 2 \\ \dfrac{k^2}{k^{2a}} = \dfrac{1}{k^{2a-2}} & \text{se } 3/2 < a < 2 \\ \dfrac{k^2}{2k^3} = \dfrac{1}{2k} & \text{se } a = 3/2 \\ \dfrac{k^2}{k^3} = \dfrac{1}{k} & \text{se } 0 < a < 3/2 \end{cases}$$

Allora, per il confronto asintotico, la serie converge se e solo se $a > 3/2$ (così $2a - 2 > 1$).

Esercizio 5.a. Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione

$$(3+i)z = 2-4i.$$

Abbiamo che

$$z = \frac{2-4i}{3+i} = \frac{(2-4i)(3-i)}{|3+i|^2} = \frac{6-12i-2i+4i^2}{3^2+1^2} = \frac{2-14i}{10} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i.$$

Esercizio 5.b. Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione

$$(2-i)\overline{z} - 5 = (1+2i)^3.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}\overline{z} &= \frac{5+(1+2i)^3}{2-i} = \frac{5+1+3\cdot 2i + 3\cdot(2i)^2+(2i)^3}{2-i} = \frac{5+1+6i-12-8i}{2-i} \\ &= \frac{-6-2i}{2-i} = -2\frac{(3+i)(2+i)}{|2-i|^2} = -2\frac{6+2i+3i+i^2}{4+1} = -2\frac{5+5i}{5} = -2-2i.\end{aligned}$$

Quindi $z = \overline{(\overline{z})} = -2+2i$.

Esercizio 5.c. Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione

$$2z(z+1) = -|3-4i|.$$

Abbiamo che l'equazione si scrive come

$$0 = 2z(z+1) + |3-4i| = 2z^2+2z+\sqrt{3^2+(-4)^2} = 2z^2+2z+5$$

Così, $\Delta = (2)^2 - 4\cdot 2\cdot 5 = -36 < 0$ e quindi le soluzioni sono

$$z_1 = \frac{-2+6i}{4} = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{-2-6i}{4} = -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i.$$

Esercizio 5.d. Risolvere

$$z^2(z^2+13) = -36.$$

L'equazione data è equivalente a

$$z^4+13z^2+36=0.$$

Poniamo $w = z^2$ e risolvendo $w^2+13w+36=0$ troviamo $\Delta = 13^2 - 4\cdot 36 = 25$ e

$$w_1 = \frac{-13+5}{2} = -4 \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{-13-5}{2} = -9.$$

Così rimangono da risolvere $z^2=-4$ e $z^2=-9$ da cui le soluzioni dell'equazione data sono

$$z_1 = 2i, \quad z_2 = -2i, \quad z_3 = 3i, \quad z_4 = -3i.$$

Esercizio 5.e. Risolvere
$$||z| - 3i|^2 = 4.$$

Dato che $|z|$ è un numero reale e $-3i$ è un numero immaginario allora

$$||z| - 3i|^2 = |z|^2 + (-3)^2 = |z|^2 + 9.$$

Così l'equazione diventa $|z|^2 + 9 = 4$, ossia $|z|^2 = -5$ che non ha soluzioni visto che $|z|^2 \geq 0$.

Esercizio 5.f. Risolvere
$$(1+i)^2((z+4i)^2 - i) = 6.$$

Dato che $(1+i)^2 = 1 + i^2 + 2i = 2i$, quindi

$$(z+4i)^2 = i + \frac{6}{2i} = i - 3i = -2i.$$

Siccome le radici quadrate di $-2i = 2e^{3\pi i/2}$ sono

$$\pm\sqrt{2}e^{3\pi i/4} = \pm\sqrt{2}(\cos(3\pi i/4) + i\sin(3\pi i/4)) = \pm(-1+i),$$

allora le soluzioni complesse dell'equazione data sono due

$$-4i + (-1+i) = -1 - 3i \quad \text{e} \quad -4i - (-1+i) = 1 - 5i.$$

Esercizio 5.g. Risolvere
$$(z+3)^3 = 64.$$

Risolviamo prima l'equazione $w^3 = 64$ dove $w = z + 3$ ossia determiniamo le radici terze complesse di 64. Dato che $64 = 2^6 e^{i0}$ le radici terze sono

$$w_k = 2^{6/3}e^{i(2k\pi)/3} \qquad \text{per } k = 0, 1, 2$$

ossia
$$w_0 = 4e^{i0/3} = 4,\ w_1 = 4e^{i2\pi/3} = -2 + 2\sqrt{3}i,\ w_2 = 4e^{i4\pi/3} = -2 - 2\sqrt{3}i.$$

Così le soluzioni dell'equazione data sono tre:

$$z_0 = w_0 - 3 = 1, \quad z_1 = w_1 - 3 = -5 + 2\sqrt{3}i, \quad z_2 = w_2 - 3 = -5 - 2\sqrt{3}i.$$

Esercizio 5.h. Risolvere

$$(z^4+16)(z^2-2z+3-2i\sqrt{3})=0.$$

Il primo fattore si annulla se e solo se z è una radice quarta di $-16=2^4e^{i\pi}$ ossia $z_k=2e^{i(\pi+2k\pi)/4}$, con $k=0,1,2,3$:

$$z_0=2e^{i\pi/4}=\sqrt{2}(1+i), \qquad z_1=2e^{3i\pi/4}=\sqrt{2}(-1+i),$$
$$z_2=2e^{5i\pi/4}=\sqrt{2}(-1-i), \qquad z_3=2e^{7i\pi/4}=\sqrt{2}(1-i).$$

Per il secondo fattore risolviamo l'equazione di secondo grado

$$z^2-2z+3-2i\sqrt{3}=0.$$

Abbiamo che

$$\Delta=(-2)^2-4(3-2i\sqrt{3})=-8+8i\sqrt{3}=16e^{i2\pi/3}$$

le cui radici quadrate sono

$$4e^{i\pi/3}=4(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3))=2+2i\sqrt{3} \quad \text{e} \quad -4e^{i\pi/3}=-2-2i\sqrt{3}.$$

Così le due soluzioni dell'equazione di secondo grado sono

$$z_4=\frac{2+(2+2i\sqrt{3})}{2}=2+i\sqrt{3}, \quad z_5=\frac{2-(2+2i\sqrt{3})}{2}=-i\sqrt{3}.$$

Quindi le soluzioni complesse dell'equazione data sono sei: z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5.

Esercizio 6.a. Fare un esempio di una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ tale che $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, ma $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = +\infty$.

Ad esempio la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

converge per il criterio di Leibniz, mentre

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

in quanto la serie armonica è divergente.

Esercizio 6.b. Fare un esempio di un numero complesso z tale che $(1+i)z + (1-i)\overline{z} = -2$ e $\lim_{n\to\infty} |z|^n = 0$.

Ponendo $z = x + iy$, abbiamo che l'equazione data diventa

$$(1+i)(x+iy) + (1-i)(x-iy) = -2$$

ossia

$$2x + 2y = -2$$

da cui otteniamo $y = x + 1$ e $z = x + i(x+1)$ dove $x \in \mathbb{R}$.
Per determinare z in modo che $\lim_{n\to\infty} |z|^n = 0$ è necessario e sufficiente che $|z| < 1$. Dato che

$$|z| = \sqrt{x^2 + (x+1)^2} = \sqrt{1 + 2x(1+x)}$$

ne segue che $x(1+x) < 0$ ossia $x \in (-1, 0)$. Ad esempio, per $x = -\frac{1}{2}$, il numero complesso

$$z = x + i(x+1) = \frac{-1+i}{2}$$

soddisfa le proprietà richieste.