

Analisi Matematica 1

Foglio di esercizi n. 10

1. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\log(1-x) - x)^2 - 2 \sin(2x^2 + x^3)}{e^{-x^2} - \cos(\sqrt{2}x)}.$$

2. Calcolare i seguenti integrali:

a. $\int_0^2 \frac{3x^3 + 2x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$

b. $\int_0^1 \frac{\log(x+3)}{\sqrt{x}} dx$

c. $\int_0^{+\infty} \frac{x+5}{(x+3)(x^2+3x+2)} dx$

d. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^2}} dx$

e. $\int_0^{\pi/4} \tan(x) \tan(2x) dx$

f. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{4x}-1}} dx$

g. $\int_0^1 \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x}} dx$

h. $\int_0^{+\infty} e^{-[x]} dx$

3. Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$:

a. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(x)(1-\sin(x))}}{\tan^a(x) \cos^2(x)} dx$

b. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\tan(x)}{(\tan^2(x)-1)^a} dx$

c. $\int_0^3 \frac{\sqrt{x+2} \log(x+2)}{(6+x-x^2)^a} dx$

d. $\int_0^1 \frac{|\sin(ax) - \log(1+2x)|}{x^2(\sqrt{4+x} + \sqrt{x}-2)} dx$

4. Calcolare la somma della serie:

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^k - 2 \cdot 5^k}{20^{k-1}}$

b. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1}$

5. Studiare il comportamento delle seguenti serie:

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$

b. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(1/k)}{\log(k^2+k+1)}$

c. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2+1} - k}{e^{-k} + \log^2(k)}$

d. $\sum_{k=1}^{\infty} k^k e^{-k^2}$

e. $\sum_{k=0}^{\infty} \cos(\pi k) \arctan(1/k)$

f. $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k^3+1} - \sqrt{k^3-1})$

g. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

h. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log(k)}}$

6. Risolvere i seguenti problemi:

a. sapendo che $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$, calcolare $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!}$ e $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$;

b. fare un esempio di una funzione f positiva e derivabile in $(0, +\infty)$ tale che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ e $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ sia convergente.