Analisi Matematica 1
Foglio di esercizi n. 9
SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Calcolare
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x+e^{-x}-2}+\frac{1}{\log(x^2+\cos(2x))}\right).$$

Abbiamo che per $x\to 0$,
$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^x+e^{-x}-2}+\frac{1}{\log(x^2+\cos(2x))} &= \frac{1}{x^2+\frac{x^4}{12}+o(x^4)}+\frac{1}{\log(1-x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^4))}\\
&= \frac{1}{x^2+\frac{x^4}{12}+o(x^4)}+\frac{1}{-x^2+\frac{2x^4}{3}-\frac{1}{2}\left(-x^2+o(x^2)\right)^2+o(x^4)}\\
&= \frac{1}{x^2+\frac{x^4}{12}+o(x^4)}+\frac{1}{-x^2+\frac{x^4}{6}+o(x^4)}\\
&= \frac{-x^2+\frac{x^4}{6}+o(x^4)+\left(x^2+\frac{x^4}{12}+o(x^4)\right)}{(x^2+o(x^2))(-x^2+o(x^2))}\\
&= \frac{\frac{x^4}{4}+o(x^4)}{-x^4+o(x^4)}\to -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.b. Calcolare
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\log(1+x^2)}\int_0^x t\sin(2t)e^{3t}\,dt.$$

Sia
$$F(x)=\int_0^x t\sin(2t)e^{3t}\,dt$$
allora per il teorema fondamentale del calcolo integrale F è derivabile e $F'(x)=x\sin(2x)e^{3x}$. Inoltre, dato che $\lim_{x\to 0}F(x)=0$, il limite è della forma $0/0$ e applicando de L'Hopital si ha
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\sin(2t)e^{3t}\,dt}{x\log(1+x^2)} &= \lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x\log(1+x^2)} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{(x\log(1+x^2))'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x\sin(2x)e^{3x}}{\log(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x(2x+o(x))(1+o(1))}{x^2+o(x^2)+2x^2(1+o(1))}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2x^2+o(x^2)}{3x^2+o(x^2)}=\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = x^2 + \log|x^2 - 3|$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$ e la funzione è pari. Per $|x| \to +\infty$,

$$f(x) = x^2(1 + o(1))$$

e quindi non ci sono asintoti per $x \to \pm\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\sqrt{3}} (x^2 + \log|x^2 - 3|) = -\infty.$$

Per $x \neq \pm\sqrt{3}$ la derivata prima è

$$f'(x) = 2x + \frac{2x}{x^2 - 3} = \frac{2x(x^2 - 2)}{x^2 - 3}.$$

Quindi f è crescente in $(-\sqrt{3}, -\sqrt{2}]$, in $[0, \sqrt{2}]$ e in $(\sqrt{3}, +\infty)$ mentre è decrescente in $(-\infty, -\sqrt{3})$, in $[-\sqrt{2}, 0]$ e in $[\sqrt{2}, \sqrt{3})$. I punti $x = \pm\sqrt{2}$ sono di massimo relativo e $x = 0$ è un punto di minimo relativo. Non ci sono punti di minimo o di massimo assoluto.
Per $x \neq \pm\sqrt{3}$ la derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{2(x^4 - 7x^2 + 6)}{(x^2 - 3)^2}.$$

La funzione è convessa in $(-\infty, -\sqrt{6}]$, in $[-1, 1]$ e in $[\sqrt{6}, +\infty)$ mentre è concava in $[-\sqrt{6}, -\sqrt{3})$, in $(-\sqrt{3}, -1]$, in $[1, \sqrt{3})$ e in $(\sqrt{3}, \sqrt{6}]$. I punti $x = \pm 1$ e $x = \pm\sqrt{6}$ sono dei flessi.

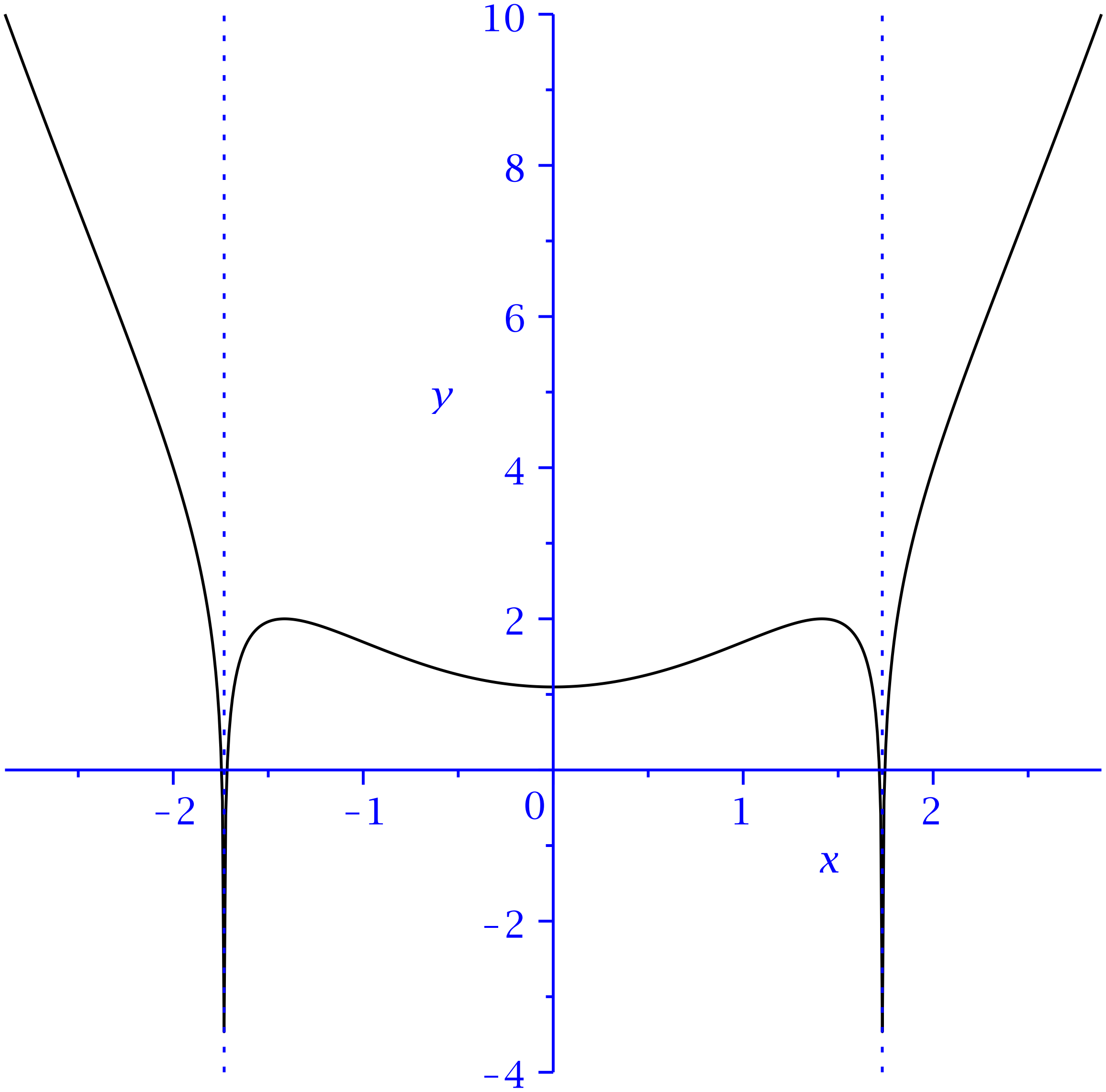

Grafico di $f(x) = x^2 + \log|x^2 - 3|$

Esercizio 3.a. Calcolare
$$\int \frac{x^4+1}{(x-1)^2(x+1)}\,dx.$$

Effettuando la divisione otteniamo
$$\frac{x^4+1}{(x-1)^2(x+1)} = x+1+\frac{2x^2}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Inoltre la funzione razionale rimanente può essere scritta come combinazione lineare di funzioni razionali semplici:
$$\frac{2x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}.$$

Moltiplicando a sinistra e a destra per $(x-1)^2$ e calcolando il limite per $x \to 1$ otteniamo
$$B = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2}{(x+1)} = 1.$$

Analogamente moltiplicando a sinistra e a destra per $(x+1)$ e calcolando il limite per $x \to -1$ otteniamo
$$C = \lim_{x\to -1} \frac{2x^2}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}.$$

Così
$$\frac{2x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1/2}{x+1}$$

e sostituendo ad esempio $x=0$ otteniamo che $A = 3/2$. Quindi
$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+1}{(x-1)^2(x+1)}\,dx &= \int \left(x+1+\frac{3/2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1/2}{x+1}\right)dx \\ &= \frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}\log|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\log|x+1|+c.\end{aligned}$$

Esercizio 3.b. Calcolare
$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx.$$

Posto $t=e^x$, allora $x=\log(t)$ e $dx = dt/t$. Quindi
$$\begin{aligned}\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx &= \int \frac{t+1}{t(t^2+1)}\,dt = \int \left(\frac{t+1}{t(t^2+1)}\right)dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2+1}-\frac{t}{t^2+1}\right)dt \\ &= \ln|t|+\arctan(t)-\frac{\log(1+t^2)}{2}+c \\ &= x+\arctan(e^x)-\frac{\log(1+e^{2x})}{2}+c.\end{aligned}$$

Esercizio 3.c. Calcolare
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x-9)}\,dx.$$

Poniamo $t=\sqrt{x}$, allora $t^2=x$, $2tdt=dx$ e

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}(x-9)}\,dx &= \int \frac{2t}{t(t^2-9)}\,dt\\ &= \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+3}\right)dt\\ &= \frac{1}{3}\log\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+c\\ &= \frac{1}{3}\log\left(\frac{|\sqrt{x}-3|}{\sqrt{x}+3}\right)+c.\end{aligned}$$

Esercizio 3.d. Calcolare
$$\int \log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$$

Integrando per parti si ha che

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx &= x\log(x+\sqrt{1+x^2})-\int \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx\\ &= x\log(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\\ &= x\log(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+c.\end{aligned}$$

Esercizio 4.a. Calcolare
$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx.$$

Posto $t = \sqrt{x}$, si ha che $t^2 = x$ e $2tdt = dx$. Quindi
$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^2 e^t\,(2tdt) = 2\int_0^2 e^t(t-1)\,dt = 2\Big[e^t(t-1)\Big]_0^2 = 2(e^2+1).$$

Esercizio 4.b. Calcolare
$$\int_1^4 (|x-2|-x)\log(x)\,dx.$$

Abbiamo che
$$\begin{aligned}\int_1^4 (|x-2|-x)\log(x)\,dx &= \int_1^2 ((2-x)-x)\log(x)\,dx + \int_2^4 ((x-2)-x)\log(x)\,dx\\ &= 2\int_1^2 \log(x)\,dx - \int_1^2 2x\log(x)\,dx - 2\int_2^4 \log(x)\,dx\\ &= 2\Big[x\log(x)-x\Big]_1^2 - \Big[x^2\log(x)-\frac{x^2}{2}\Big]_1^2 - 2\Big[x\log(x)-x\Big]_2^4\\ &= 2(2\log(2)-1) - \Big(4\log(2)-\frac{3}{2}\Big) - 2(4\log(4)-2-2\log(2))\\ &= \frac{7}{2} - 12\log(2)\end{aligned}$$

perché
$$\int \log(x)\,dx = x\log(x) - \int x(1/x)\,dx = x\log(x) - x + c$$

e
$$\begin{aligned}\int 2x\log(x)\,dx = \int \log(x)\,d(x^2) &= x^2\log(x) - \int x^2\,d(\log(x))\\ &= x^2\log(x) - \int x^2(1/x)\,dx = x^2\log(x) - \frac{x^2}{2} + c.\end{aligned}$$

Esercizio 4.c. Calcolare
$$\int_{-1}^{1} (\sqrt{3}x - 1)^2 \arctan|x|\, dx.$$

Dopo aver svolto il quadrato notiamo che la funzione dispari $2\sqrt{3}x \arctan|x|$ può essere tolta perché il suo integrale in $[-1, 1]$ vale zero,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (\sqrt{3}x - 1)^2 \arctan|x|\, dx &= \int_{-1}^{1} (3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1) \arctan|x|\, dx \\
&= 2\int_{0}^{1} (3x^2 + 1) \arctan(x)\, dx \\
&= 2\int_{0}^{1} \arctan(x)\, d(x^3 + x) \\
&= 2\Big[\arctan(x)(x^3 + x)\Big]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^3 + x}{1 + x^2}\, dx \\
&= \pi - 2\int_0^1 x\, dx = \pi - \Big[x^2\Big]_0^1 = \pi - 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.d. Calcolare
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \log(1 + e^x)\, dx.$$

Sia $t = e^x$, allora $\log(t) = x$, $dt/t = dx$ e

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \log(1 + e^x)\, dx &= \int_{-\infty}^{0} e^{x} \log(1 + e^x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x} \log(1 + e^x)\, dx \\
&= \int_0^1 \log(1 + t)\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{\log(1 + t)}{t^2}\, dt \\
&= [(1 + t)\log(1 + t) - t]_0^1 + \int_1^{+\infty} \log(1 + t)\, d(-1/t) \\
&= 2\log(2) - 1 + \Big[-\frac{\log(1 + t)}{t}\Big]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t + 1)}\, dt \\
&= 3\log(2) - 1 + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + 1}\right) dt \\
&= 3\log(2) - 1 + \left[\log\left(\frac{t}{t + 1}\right)\right]_1^{+\infty} = 4\log(2) - 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.e. Calcolare
$$\int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\, dx.$$

Sia $t = \sqrt{e^{2x}-1}$, allora $\log(1+t^2) = 2x$, $2tdt/(1+t^2) = 2dx$ e
$$\int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \Big[\arctan(t)\Big]_{\sqrt{3}}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Esercizio 4.f. Calcolare
$$\int_0^1 x \log\left(\frac{x}{2-x}\right) dx.$$

Integrando per parti, si ottiene
$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \log\left(\frac{x}{2-x}\right) dx &= \int_0^1 \log\left(\frac{x}{2-x}\right) d\Big(\frac{x^2}{2}\Big) \\
&= \left[\frac{x^2}{2} \log\left(\frac{x}{2-x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2-x}{x} \cdot \frac{2}{(2-x)^2}\, dx \\
&= -\int_0^1 \frac{x}{2-x}\, dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{2}{x-2}\right) dx \\
&= \Big[x + 2\log|x-2|\Big]_0^1 = 1 - 2\log(2).
\end{aligned}$$

Esercizio 5.a. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^2 \frac{\arctan(1/\sqrt[3]{x})}{x^a}\, dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{\arctan(1/\sqrt[3]{x})}{x^a}.$$

Nell'intervallo $(0, 2]$, f è positiva e il punto da indagare è 0^+. Per $x \to 0^+$ abbiamo che

$$f(x) \sim \frac{\pi/2}{x^a}.$$

e dunque la convergenza dell'integrale improprio si ha per $a < 1$.

Esercizio 5.b. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(1/\sqrt[3]{x})}{x^a}\, dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{\arctan(1/\sqrt[3]{x})}{x^a}.$$

Nell'intervallo $[1, +\infty$, f è positiva e il punto da indagare è $+\infty$. Per $x \to +\infty$ abbiamo che

$$f(x) \sim \frac{1/\sqrt[3]{x}}{x^a} = \frac{1}{x^{a+1/3}}.$$

e dunque la convergenza dell'integrale improprio si ha per $a + 1/3 > 1$, ossia per $a > 2/3$.

Esercizio 5.c. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^4 \frac{(e^x - 1)^a}{e^x - e^{-x}}\, dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{(e^x - 1)^a}{e^x - e^{-x}}$$

Nell'intervallo $(0, 4]$, f è positiva e il punto da indagare è 0^+. Per $x \to 0^+$,

$$f(x) \sim \frac{x^a}{2x} \sim \frac{1/2}{x^{1-a}}.$$

Quindi la convergenza dell'integrale improprio si ha per $1 - a < 1$, ossia per $a > 0$.

Esercizio 5.d. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{(e^x - 1)^a}{e^x - e^{-x}}\, dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{(e^x - 1)^a}{e^x - e^{-x}}$$

Nell'intervallo $[2, +\infty)$, f è positiva e il punto da indagare è $+\infty$. Per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{e^{ax}}{e^x} = e^{(a-1)x}.$$

Così la convergenza dell'integrale improprio si ha per $a - 1 < 0$ ossia $a < 1$.

Esercizio 5.e. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x+2)(x-1)^2}{x(x^4-1)^a}\, dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-1)^2}{x(x^4-1)^a}.$$

Si noti che $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ e f è positiva in $(1, +\infty)$.
Dunque i punti da indagare sono due: 1 e $+\infty$. Per $x \to 1$,

$$f(x) \sim \frac{3(x-1)^2}{4^a(x-1)^a} = \frac{C}{(x-1)^{a-2}}.$$

Quindi, per la convergenza è necessario che $a - 2 < 1$ ossia $a < 3$. Per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{x^3}{x^{4a+1}} = \frac{1}{x^{4a-2}}.$$

Così, per la convergenza, $4a - 2 > 1$ ossia $a > \frac{3}{4}$.
Imponendo le due condizioni, l'integrale improprio è convergente se e solo se $\frac{3}{4} < a < 2$.

Esercizio 5.f. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log(x)|^a}\,dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{1 - e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log(x)|^a}.$$

f è positiva in $(1, +\infty)$ in $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ e dunque i punti da indagare sono tre: 0^+, 1 e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$ abbiamo

$$f(x) \sim \frac{1 - e^{-1}}{x^{1/3}\,|\log(x)|^a}.$$

Dato che $1/3 < 1$, la condizione di convergenza in un intorno di 0^+ è soddisfatta per ogni a.
Per $x \to 1$,

$$f(x) = \frac{1 - e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log(1 + (x-1))|^a} \sim \frac{1 - e^{-1/2}}{|x-1|^a}.$$

Così la condizione di convergenza in un intorno di 1 è soddisfatta per $a < 1$.
Per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{1/(x^2+1)}{x^{1/3}\,|\log(x)|^a} = \frac{1}{x^{7/3}|\log(x)|^a}.$$

Dato che $7/3 > 1$ la condizione di convergenza è soddisfatta per ogni a.
Quindi l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $a < 1$.

Esercizio 6.a. Determinare $a, b \in \mathbb{R}^+$ tali che la funzione $f(x) = \sin(ax) + b$ soddisfi le seguenti condizioni: la media integrale di f in $[-1, 1]$ vale 4 e l'equazione $f(x) = 4$ ha almeno due soluzioni in $(-1, 1)$.

La media integrale di f su $[-1, 1]$ è

$$\frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \sin(ax)\, dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} b\, dx = 0 + b = b \implies b = 4.$$

L'equazione $f(x) = 4$ è dunque equivalente a $\sin(ax) = 0$ e così le soluzioni in $(-1, 1)$ sono almeno due non appena $a > \pi$. In tale caso $x = 0$ e $x = \pi/a$ e $x = -\pi/a$ sono soluzioni di $f(x) = 4$.

Esercizio 6.b. Fare un esempio di una funzione f integrabile in $[-1, 1]$ tale che la funzione integrale $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\, dt$ ha un punto angoloso in 0

Basta prendere una funzione integrabile che abbia un punto di discontinuità di salto in $x = 0$. Ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

ha le proprietà richieste. Infatti f è integrabile in $[-1, 1]$ e per $x \in [-1, 0)$,

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\, dt = \int_{-1}^{x} 0\, dt = 0$$

e per $x \in [0, 1]$,

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\, dt = \int_{-1}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{x} 1\, dt = 0 + [t]_0^x = x.$$

Dunque

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 0), \\ x & \text{se } x \in [0, 1], \end{cases}$$

che ha un punto angoloso in 0: $F'_+(0) = 1$ e $F'_-(0) = 0$.