Analisi Matematica 1

Foglio di esercizi n. 8

SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin(4x)) - \cos(3\sin(x))}{\log(e+x^2) - e^{2x^2}}.$$

Per $x \to 0$, il numeratore è

$$\begin{aligned}\cos(\sin(4x)) - \cos(3\sin(x)) &= \cos(4x + o(x)) - \cos(3(x+o(x))) \\ &= \Big(1 - \frac{(4x+o(x))^2}{2} + o(x^2)\Big) - \Big(1 - \frac{(3x+o(x))^2}{2} + o(x^2)\Big) \\ &= -8x^2 + \frac{9x^2}{2} + o(x^2) = -\frac{7x^2}{2} + o(x^2).\end{aligned}$$

Mentre il denominatore è

$$\begin{aligned}\log(e+x^2) - e^{2x^2} &= 1 + \log(1 + x^2/e) - e^{2x^2} \\ &= 1 + \left(\frac{x^2}{e} + o(x^2)\right) - \big(1 + 2x^2 + o(x^2)\big) \\ &= \frac{(1-2e)x^2}{e} + o(x^2).\end{aligned}$$

Quindi, per $x \to 0$,

$$\frac{\cos(\sin(4x)) - \cos(3\sin(x))}{\log(e+x^2) - e^{2x^2}} = \frac{-\frac{7x^2}{2} + o(x^2)}{\frac{(1-2e)x^2}{e} + o(x^2)} \to \frac{7e}{4e-2}.$$

Esercizio 1.b. Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(2+2^{1/x})^x + x^{\log(x)}}{x\left(3^x - \left(3 - \frac{1}{x^2}\right)^x\right)}.$$

Per $x \to +\infty$, dopo aver diviso numeratore e denominatore per 3^x abbiamo

$$\frac{(2+2^{1/x})^x + x^{\log(x)}}{x\left(3^x - \left(3 - \frac{1}{x^2}\right)^x\right)} = \frac{(1 + \frac{2^{1/x}-1}{3})^x + \frac{x^{\log(x)}}{3^x}}{x\left(1 - \left(1 - \frac{1}{3x^2}\right)^x\right)}.$$

Ora

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{2^{1/x}-1}{3}\right)^x &= \left(1 + \frac{e^{\log(2)/x}-1}{3}\right)^x \\ &= \left(1 + \frac{\log(2)}{3x} + o(1/x)\right)^x \to e^{\log(2)/3} = \sqrt[3]{2}.\end{aligned}$$

Inoltre

$$\frac{x^{\log(x)}}{3^x} = \exp\Big(\log^2(x) - x\log(3)\Big) \to e^{-\infty} = 0.$$

Infine

$$\begin{aligned}
x\left(1 - \left(1 - \frac{1}{3x^2}\right)^x\right) &= x\left(1 - \exp\left(x\log\left(1 - \frac{1}{3x^2}\right)\right)\right) \\
&= x\left(1 - \exp\left(x\left(-\frac{1}{3x^2} + o(1/x^2)\right)\right)\right) \\
&= \frac{1 - \exp\left(-\frac{1}{3x} + o(1/x)\right)}{1/x} \\
&= \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{3x} + o(1/x)\right)}{1/x} \to \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Cosi, per $x \to +\infty$,

$$\frac{(2 + 2^{1/x})^x + x^{\log(x)}}{x\left(3^x - \left(3 - \frac{1}{x^2}\right)^x\right)} \to \frac{\sqrt[3]{2} + 0}{1/3} = 3\sqrt[3]{2}.$$

Esercizio 2.a. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = 2\log(x^2 - 2x + 2) - |x|$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Dato che $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$, il dominio è $D = \mathbb{R}$. Per $|x| \to +\infty$,

$$f(x) = -|x| + 4\log|x| + o(1)$$

e quindi non ci sono asintoti a $\pm\infty$.
Per $x \neq 0$ la derivata prima è

$$f'(x) = \frac{4(x-1)}{x^2 - 2x + 2} \mp 1 = \begin{cases} -\dfrac{x^2 - 6x + 6}{x^2 - 2x + 2} & \text{se } x \in (0, +\infty), \\[2ex] \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - 2x + 2} & \text{se } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Quindi f è crescente in $(-\infty, -1-\sqrt{3}]$ e in $[3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}]$ mentre è decrescente in $[-1-\sqrt{3}, 3-\sqrt{3}]$ e in $[3+\sqrt{3}, +\infty)$. La funzione non è derivabile in 0 dove c'è un punto angoloso con

$$f'_-(0) = -1 \quad \text{e} \quad f'_+(0) = -3.$$

Il punto $x = -1-\sqrt{3} \simeq -2.73$ è di massimo assoluto e $x = 3+\sqrt{3} \simeq 4.73$ è un punto di massimo relativo, mentre $x = 3-\sqrt{3} \simeq 1.27$ è un punto di minimo relativo. Non ci sono punti di minimo assoluto.
Per $x \neq 0$ la derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{4x(2-x)}{(x^2 - 2x + 2)^2}.$$

La funzione è convessa in $[0, 2]$ ed è concava in $(-\infty, 0]$ e in $[2, +\infty)$. Il punto $x = 2$ è un flesso.

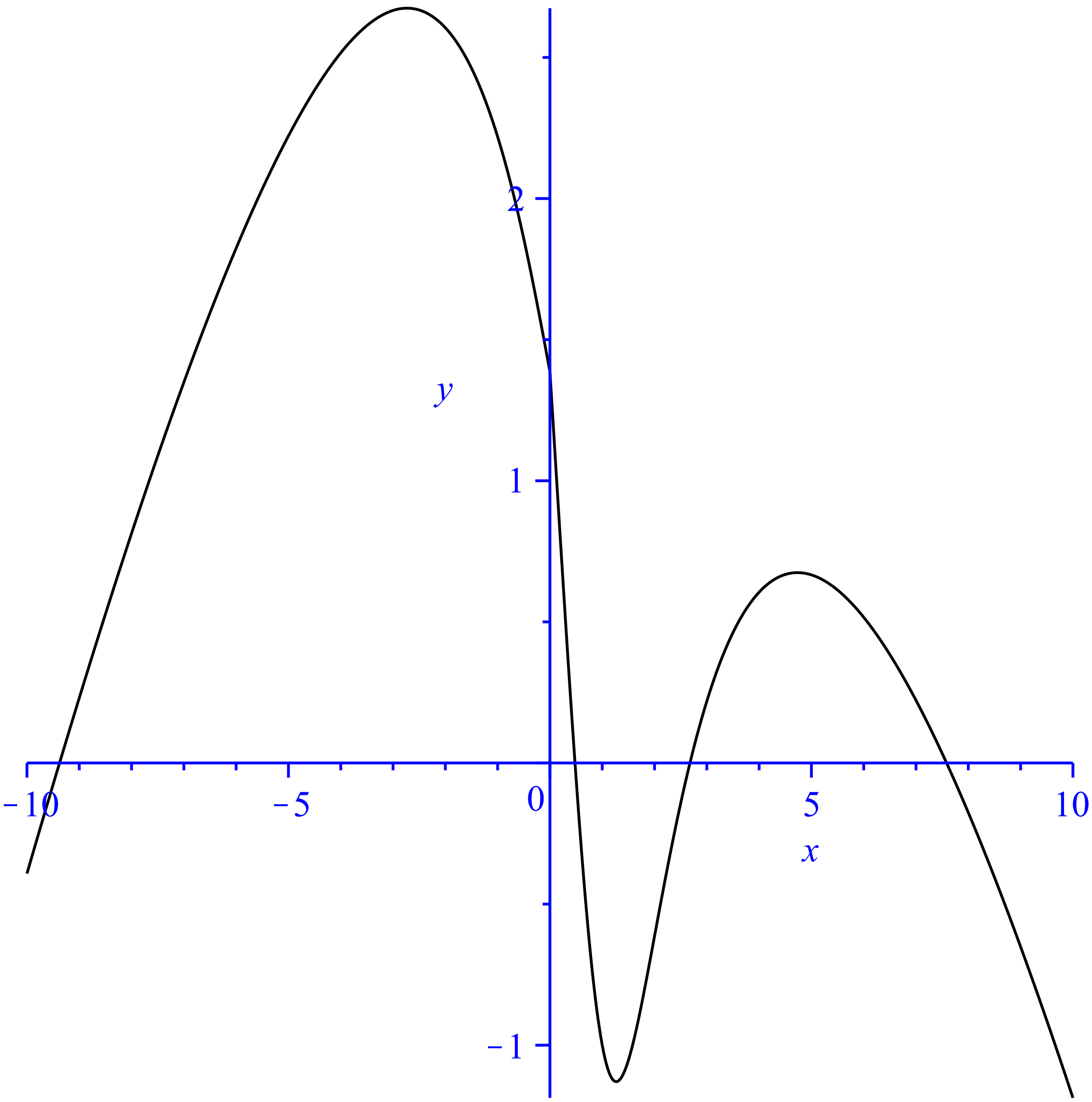

Grafico di $f(x) = 2\log(x^2 - 2x + 2) - |x|$

Esercizio 2.b. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan(1/x) + \frac{3|x|}{1+x^2}$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Abbiamo che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\arctan(1/x) + \frac{3|x|}{1+x^2} \right) = 0$$

e quindi $y = 0$ è l'asintoto a $\pm\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^\pm} \left(\arctan(1/x) + \frac{3|x|}{1+x^2} \right) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Per $x \neq 0$, la derivata prima è

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \pm \frac{3(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \begin{cases} \dfrac{2(1-2x^2)}{(1+x^2)^2} & \text{se } x \in (0,+\infty), \\[2ex] \dfrac{2(x^2-2)}{(1+x^2)^2} & \text{se } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Quindi f è crescente in $(-\infty, -\sqrt{2}]$ e in $(0, 1/\sqrt{2}]$ mentre è decrescente in $[-\sqrt{2}, 0)$ e in $[1/\sqrt{2}, +\infty)$. Il punto $x = 1/\sqrt{2}$ è di massimo assoluto e $x = -\sqrt{2}$ è un punto di massimo relativo. Non ci sono punti di minimo relativo.
Per $x \neq 0$, la derivata seconda è

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{8x(x^2-2)}{(1+x^2)^3} & \text{se } x \in (0,+\infty), \\[2ex] \dfrac{4x(5-x^2)}{(1+x^2)^3} & \text{se } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

La funzione è convessa in $(-\infty, -\sqrt{5}]$ e in $[\sqrt{2}, +\infty)$, mentre è concava in $[-\sqrt{5}, 0)$ e in $(0, \sqrt{2}]$. Il punti $x = -\sqrt{5}$ e $x = \sqrt{2}$ sono dei flessi.

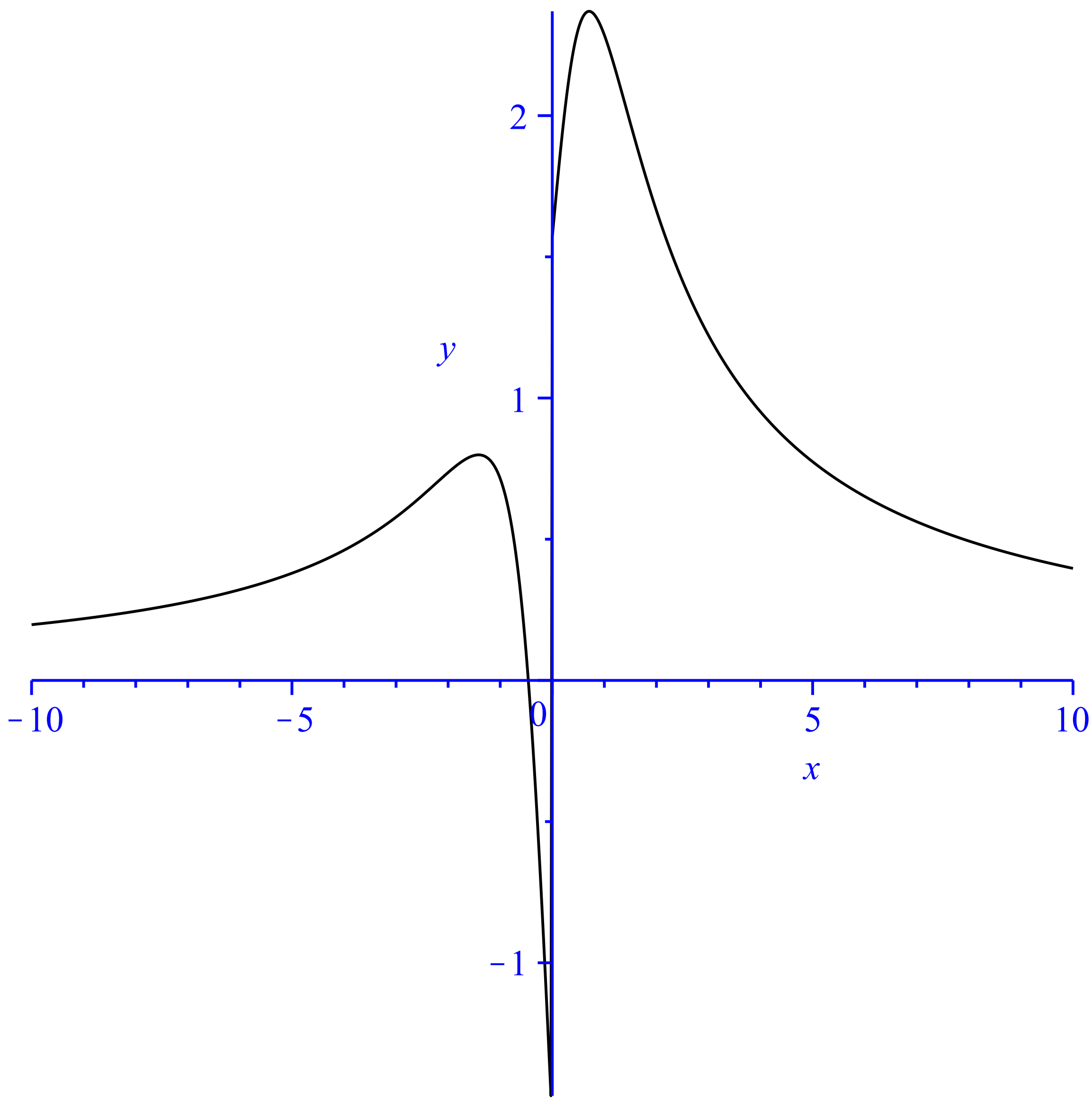

Grafico di $f(x) = \arctan(1/x) + \dfrac{3|x|}{1+x^2}$

Esercizio 3.a. Calcolare
$$\int \tan^2(x)\, dx.$$

Si ha che
$$\int \tan^2(x)\, dx = \int ((\tan^2(x) + 1) - 1)\, dx = \tan(x) - x + c.$$

Esercizio 3.b. Calcolare
$$\int \frac{3x^4 + 1}{x^2 + 1}\, dx.$$

Si ha che
$$\frac{3x^4 + 1}{x^2 + 1} = \frac{3(x^4 - 1) + 4}{x^2 + 1} = 3(x^2 - 1) + \frac{3}{x^2 + 1} = 3x^2 - 3 + \frac{4}{x^2 + 1}.$$

Quindi, per linearità,
$$\int \frac{3x^4 + 1}{x^2 + 1}\, dx = \int 3x^2\, dx - \int 3\, dx + 4 \int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx = x^3 - 3x + 4 \arctan(x) + c.$$

Esercizio 3.c. Calcolare
$$\int \frac{xe^{x^2}}{9 + e^{2x^2}}\, dx.$$

Poniamo $t = e^{x^2}$, allora $dt = e^{x^2} 2x\, dx$ e
$$\int \frac{xe^{x^2}}{9 + e^{2x^2}}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{3^2 + t^2} = \frac{\arctan(t/3)}{6} + c = \frac{\arctan(e^{x^2}/3)}{6} + c.$$

Esercizio 3.d. Calcolare
$$\int \frac{\log(\log(x))}{x}\, dx.$$

Poniamo $t = \log(x)$, allora $dt = dx/x$ e
$$\begin{aligned}\int \frac{\log(\log(x))}{x}\, dx &= \int \log(t) dt = t \log(t) - \int t\, d(\log(t)) \\ &= t \log(t) - \int 1\, dt = t \log(t) - t + c \\ &= \log(x) \log(\log(x)) - \log(x) + c.\end{aligned}$$

Esercizio 3.e. Calcolare
$$\int x \log(1+x)\, dx.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int x \log(1+x)\, dx = \int \log(1+x)\, d(x^2/2) &= \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}\int x^2 d(\log(1+x)) \\
&= \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x}\, dx \\
&= \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1+1}{1+x}\, dx \\
&= \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}\int (x-1)\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} \\
&= \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\log(1+x)}{2} + c.
\end{aligned}$$

Si noti che la funzione $x\log(1+x)$ è definita per $1+x>0$ e quindi nell'integrazione di $1/(x+1)$ non occorre mettere il modulo all'argomento del logaritmo.

Esercizio 3.f. Calcolare
$$\int \frac{e^{\tan(x)}(\sin(x)+\cos(x))}{\cos^3(x)}\, dx.$$

Poniamo $t=\tan(x)$, allora $dt = dx/\cos^2(x)$ e

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{\tan(x)}(\sin(x)+\cos(x))}{\cos^3(x)}\, dx &= \int \frac{e^{\tan(x)}(\tan(x)+1)}{\cos^2(x)}\, dx \\
&= \int e^t(t+1)\, dt = \int (t+1)\, d(e^t) \\
&= (t+1)e^t - \int e^t\, dt = e^t(t+1-1) + c \\
&= e^{\tan(x)}\tan(x) + c.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.a. Calcolare
$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^3(x)\,dx.$$

Poniamo $t = \sin(x)$, allora $dt = \cos(x)dx$ e

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^3(x)\,dx &= \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)(1-\sin^2(x))\cos(x)\,dx \\
&= \int_0^1 t^2(1-t^2)\,dt \\
&= \Big[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\Big]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.b. Calcolare
$$\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{1-x}+6}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Si ha che

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{1-x}+6}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_0^{1/2} \Big(\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{6}{\sqrt{1-x^2}}\Big)\,dx \\
&= \Big[\frac{(1+x)^{1/2}}{1/2} + 6\arcsin(x)\Big]_0^{1/2} \\
&= 2(3/2)^{1/2} + \pi - 2 = \sqrt{6} + \pi - 2.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.c. Calcolare
$$\int_1^e \frac{1}{x(3+\log(x))^2}\,dx.$$

Poniamo $t = \log(x)$, allora $dt = dx/x$ e

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{dx}{x(3+\log(x))^2} &= \int_0^1 \frac{dt}{(3+t)^2} \\
&= \Big[-\frac{1}{3+t}\Big]_0^1 \\
&= -\frac{1}{4} - \Big(-\frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.d. Calcolare
$$\int_0^1 (1+2x^2)e^{2x}\,dx.$$

Integrando due volte per parti, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1+2x^2)e^{2x}\,dx &= \int_0^1 (1+2x^2)e^{2x}\,d(e^{2x}/2) \\
&= \Big[(1+2x^2)\frac{e^{2x}}{2}\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,d(1+2x^2) \\
&= \frac{3e^2}{2} - \frac{1}{2} - 2\int_0^1 xe^{2x}\,dx \\
&= \frac{3e^2}{2} - \frac{1}{2} - \int_0^1 x\,d(e^{2x}) \\
&= \frac{3e^2}{2} - \frac{1}{2} - \Big[xe^{2x}\Big]_0^1 + \int_0^1 e^{2x}\,dx \\
&= \frac{3e^2}{2} - \frac{1}{2} - e^2 + \Big[\frac{e^{2x}}{2}\Big]_0^1 \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = e^2 - 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.e. Calcolare
$$\int_{-\pi}^{\pi} |x|(\cos(x) - 2\sin(x))\,dx.$$

Dato che la funzione $|x|\cos(x)$ è pari e la funzione $|x|\sin(x)$ è dispari,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |x|(\cos(x) - 2\sin(x))\,dx &= 2\int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx = 2\int_0^{\pi} x\,d(\sin(x)) \\
&= 2\Big[x\sin(x)\Big]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx \\
&= 0 + 2\Big[\cos(x)\Big]_0^{\pi} = -2 - 2 = -4.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.f. Calcolare

$$\int_0^\pi \left(\sin^2(x) + \cos^3(x)\right)\, dx.$$

La funzione $\cos^3(x)$ è dispari rispetto al centro $x = \pi/2$ dell'intervallo $[0, \pi]$. Così $\int_0^\pi \cos^3(x)\, dx = 0$. Allo stesso risultato si arriva integrando direttamente: $\int \cos^3(x)\, dx = \int (1 - \sin^2(x))\, d(\sin(x)) = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + c$. Inoltre $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$. Quindi

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\sin^2(x) + \cos^3(x)\right)\, dx &= \int_0^\pi \sin^2(x)\, dx + 0 = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos(2x))\, dx \\ &= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Esercizio 4.g. Calcolare

$$\int_0^2 \log(4 + x^2)\, dx.$$

Integriamo per parti

$$\begin{aligned}\int_0^2 \log(4 + x^2)\, dx &= \Big[x \log(4 + x^2)\Big]_0^2 - \int_0^2 \frac{2x^2}{4 + x^2}\, dx \\ &= 2\log(8) - 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1 + (x/2)^2}\right) dx \\ &= 6\log(2) - 2\Big[x - 2\arctan(x/2)\Big]_0^2 \\ &= 6\log(2) - 4 + \pi.\end{aligned}$$

Esercizio 4.h. Calcolare

$$\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos(x)}\, dx.$$

Poniamo $t = \sin(x)$, allora $dt = \cos(x)\, dx$ e

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos(x)}\, dx &= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)}\, dx \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1}{1 - t^2}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \left(\frac{1}{1 - t} + \frac{1}{1 + t}\right) dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{1 + t}{1 - t}\right)\right]_0^{1/2} = \frac{\log(3)}{2}.\end{aligned}$$

Esercizio 5.a. Fare un esempio di una funzione f continua e strettamente crescente in $[0, +\infty)$ tale che la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Ad esempio $f(x) = 1 - e^{-x}$ soddisfa le condizioni richieste. $f'(x) = e^{-x} > 0$ e

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x (1 - e^{-t})\,dt = \left[t + e^{-t}\right]_0^x = x + e^{-x} - 1.$$

Per $x \to +\infty$,

$$F(x) = x + e^{-x} - 1 = x - 1 + o(1)$$

e quindi $y = x - 1$ è l'asintoto obliquo di F per $x \to +\infty$.

Esercizio 5.b. Determinare il più grande numero reale m tale che per ogni $x > 1$,

$$e^{x/4} \geq m\frac{x-1}{x+1}.$$

Per $x > 1$, la disuguaglianza data è equivalente a

$$f(x) = e^{x/4} \cdot \frac{x+1}{x-1} \geq m$$

quindi il numero cercato m è l'estremo inferiore di $f((1, +\infty))$. Studiamo la monotonia di f in $(1, +\infty)$:

$$f'(x) = \frac{e^{x/4}}{4} \cdot \frac{x+1}{x-1} + e^{x/4} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{e^{x/4}(x^2-9)}{4(x-1)^2}.$$

Quindi f è decrescente in $(1, 3]$ ed è crescente in $[3, +\infty)$. Quindi $x = 3$ è in punto di minimo assoluto di f in $(1, +\infty)$e possiamo concludere che il più grande numero m tale che vale la disuguaglianza data è

$$m = f(3) = 2e^{3/4}.$$