Analisi Matematica 1
Foglio di esercizi n. 7
SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{1 - x}$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Il dominio è $D = [0, 1) \cup (1, 2]$. La funzione vale zero in $x = 0$ e $x = 2$, è negativa in $(0, 1)$, ed è positiva in $(1, 2)$. Inoltre

$$\lim_{x \to 1^\pm} \frac{\sqrt{2x - x^2}}{1 - x} = \mp\infty.$$

La funzione è derivabile in $(0, 1) \cup (1, 2)$,

$$f'(x) = \frac{1}{(2x - x^2)^{1/2}(x - 1)^2}.$$

Studiando il segno di f' abbiamo che la funzione è crescente in $[0, 1)$ ed è decrescente in $(1, 2]$. Inoltre

$$f''(x) = \frac{1 - 6x + 3x^2}{(2x - x^2)^{3/2}(x - 1)^3}$$

e studiando il segno di f'' abbiamo che la funzione è convessa $[1 - \sqrt{2/3}, 1)$ e in $[1 + \sqrt{2/3}, 2]$ ed è concava in $[0, 1 - \sqrt{2/3}]$ e in $(1, 1 + \sqrt{2/3}]$. Il punto $x = 0$ è di minimo relativo mentre $x = 2$ è un punto di massimo relativo. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto. I punti $x = 1 - \sqrt{2/3}$ e $x = 1 + \sqrt{2/3}$ sono dei flessi.

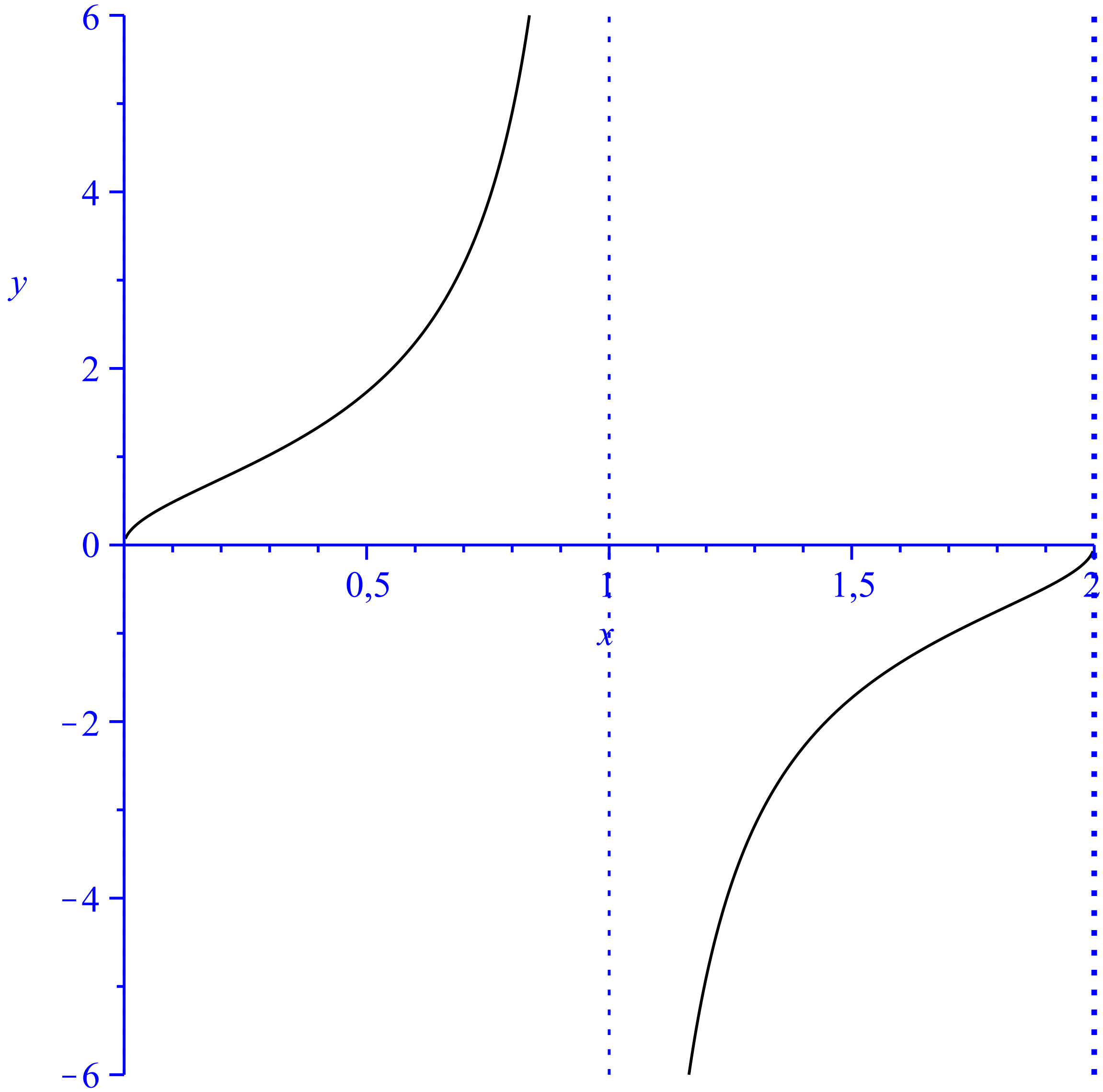

Grafico di $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x - x^2}}{1 - x}$

Esercizio 1.b. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{|x^2 - 4| - 4}{(x-2)^2}$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. La funzione è positiva in $(-\infty, -2\sqrt{2})$ e in $(2\sqrt{2}, +\infty)$, si annulla in $x = 0$, in $x = \pm 2\sqrt{2}$. Per $|x| \to +\infty$, la funzione tende a 1 e quindi l'asintoto a $\pm\infty$ è $y = 1$. Inoltre

$$\lim_{x \to 2^\pm} \frac{|x^2 - 4| - 4}{(x-2)^2} = -\infty.$$

La derivata prima è

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{4(x-4)}{(x-2)^3} & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty), \\ \dfrac{4x}{(x-2)^3} & \text{se } x \in (-2, 2). \end{cases}$$

La funzione non è derivabile in -2 dove c'è un punto angoloso

$$f'_-(-2) = -\frac{3}{8} \quad \text{e} \quad f'_+(-2) = \frac{1}{8}.$$

Dal segno della derivata prima si ha che f è crescente in $[-2, 0]$ e in $(2, 4]$ ed è decrescente in $(-\infty, -2]$, in $[0, 2)$ e in $[4, +\infty)$. Il punto $x = 4$ è di massimo assoluto e il punto $x = 0$ è di massimo relativo. Il punto $x = -2$ è di minimo relativo e non ci sono punti di minimo assoluto. La derivata seconda è

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{8(x-5)}{(x-2)^4} & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty), \\ -\dfrac{8(x+1)}{(x-2)^4} & \text{se } x \in (-2, 2). \end{cases}$$

Dal segno della derivata seconda si ha che f è convessa $[-2, -1]$ e in $[5, +\infty)$, mentre è concava in $(-\infty, -2]$, in $[-1, 2)$ e in $(2, 5]$. I punti $x = -1$ e $x = 5$ sono dei flessi.

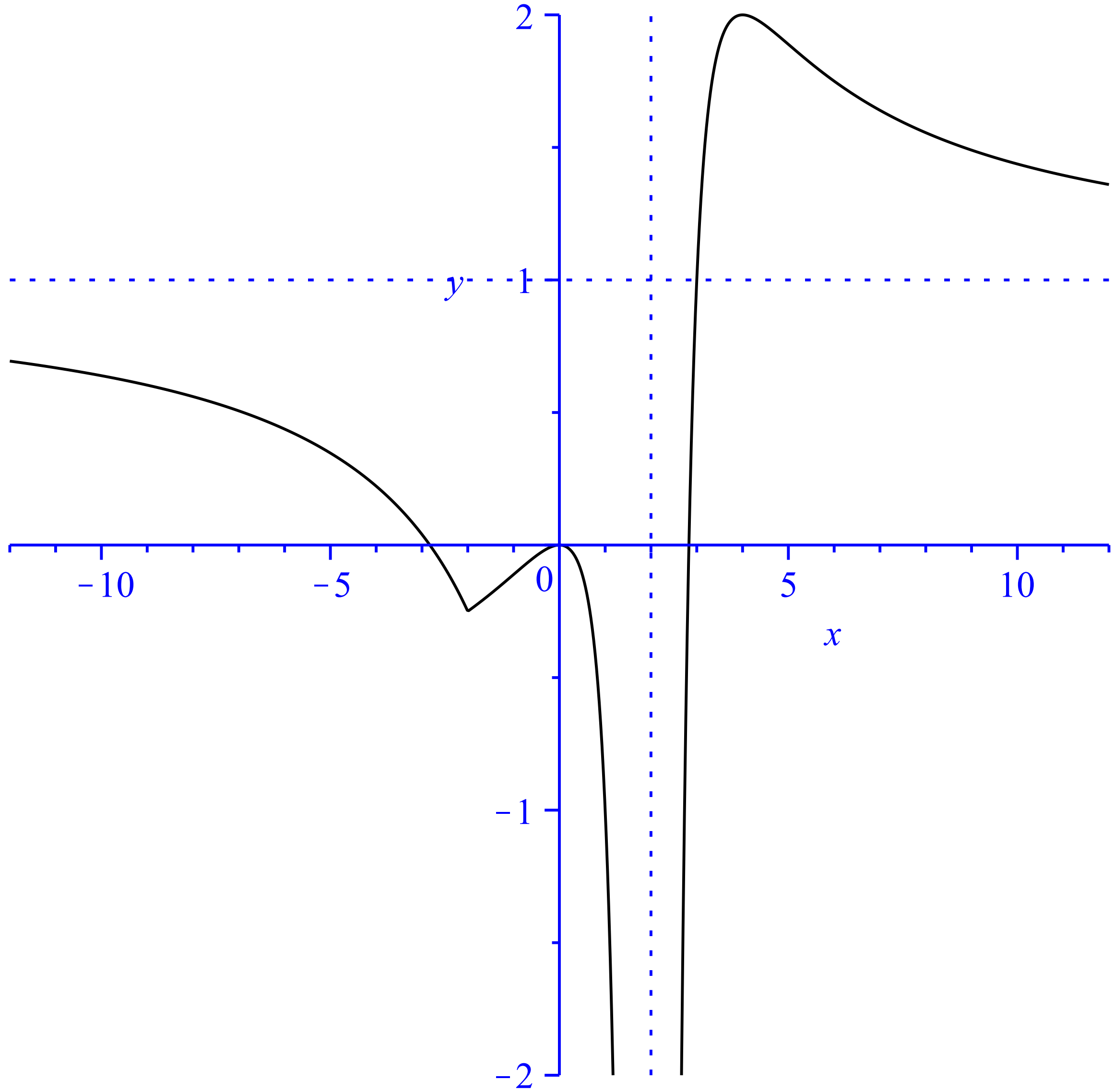

Grafico di $f(x) = \dfrac{|x^2 - 4| - 4}{(x-2)^2}$

Esercizio 2.a. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 1$ di ordine $n = 3$ della funzione
$$f(x) = \log\left(\frac{x}{2-x^2}\right).$$

Ponendo $x = t + 1$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{x}{2-x^2}\right) &= \log(1+t) - \log(2-(t+1)^2) \\
&= \log(1+t) - \log(1-(2t+t^2)) \\
&= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + (2t+t^2) + \frac{(2t+t^2)^2}{2} + \frac{(2t+t^2)^3}{3} + o(t^3) \\
&= (1+2)t + \left(-\frac{1}{2} + 1 + 2\right)t^2 + \left(\frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3}\right)t^3 + o(t^3) \\
&= 3t + \frac{5t^2}{2} + 5t^3 + o(t^3).
\end{aligned}$$

Quindi
$$T_3(x) = 3(x-1) + \frac{5(x-1)^2}{2} + 5(x-1)^3.$$

Esercizio 2.b. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di ordine $n = 4$ della funzione
$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{(1-2x)(x^2+1)}.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-x^2}}{(1-2x)(x^2+1)} &= \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)(1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + (2x)^4 + o(x^4)) \\
&\quad \cdot (1 - x^2 + x^4 + o(x^4)) \\
&= 1 + 2x + (4-1-1)x^2 + (8-2-2)x^3 \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} + 16 + 1 - 4 + 1 - 4\right)x^4 + o(x^4) \\
&= 1 + 2x + 2x^2 + 4x^3 + \frac{21x^4}{2} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Quindi
$$T_4(x) = 1 + 2x + 2x^2 + 4x^3 + \frac{21x^4}{2}.$$

Esercizio 2.c. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di ordine $n = 5$ della funzione

$$f(x) = \frac{\log(\cos(x))}{1 + \sin^2(x)}.$$

Dato che la funzione è pari, i coefficienti delle potenze dispari di x sono zero. Basta così sviluppare fino all'ordine 4:

$$\begin{aligned}
\frac{\log(\cos(x))}{1+\sin^2(x)} &= \frac{\log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)}{1 + (x + o(x))^2} \\
&= \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)}{1 + x^2 + o(x^2)} \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right) \cdot (1 - x^2 + o(x^2)) \\
&= -\frac{x^2}{2} + \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{2}\right)x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Quindi

$$T_5(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{12}.$$

Esercizio 2.d. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di ordine $n = 4$ della funzione

$$f(x) = \frac{\arctan(x - x^2)}{\sqrt{1 + 3x^2}}.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\frac{\arctan(x-x^2)}{\sqrt{1+3x^2}} &= \left((x - x^2) - \frac{(x-x^2)^3}{3} + o(x^4)\right)\left(1 - \frac{3x^2}{2} + o(x^3)\right) \\
&= \left(x - x^2 - \frac{x^3}{3} + x^4 + o(x^4)\right)\left(1 - \frac{3x^2}{2} + o(x^3)\right) \\
&= x - x^2 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right)x^3 + \left(1 + \frac{3}{2}\right)x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Quindi

$$T_4(x) = x - x^2 - \frac{11x^3}{6} + \frac{5x^4}{2}.$$

Esercizio 2.e. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 1$ di ordine $n = 3$ della funzione

$$f(x) = x^x.$$

Ponendo $x = t + 1$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
x^x &= \exp((1+t)\log(1+t)) \\
&= \exp\Big((1+t)\Big(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)\Big)\Big) \\
&= \exp\Big(t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{12} + o(t^4)\Big) \\
&= 1 + \Big(t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\Big) + \frac{1}{2!}\Big(t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\Big)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3!}(t + o(t))^3 + o(t^3) \\
&= 1 + t + \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big)t^2 + \Big(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\Big)t^3 + o(t^3) \\
&= 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{2} + o(t^3).
\end{aligned}$$

Quindi

$$T_4(x) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2}.$$

Esercizio 2.f. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 3\pi/2$ di ordine $n = 4$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 + \cos^2(x)}.$$

Ponendo $x = t + 3\pi/2$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\cos^2(x)} = \sqrt{1+\cos^2(3\pi/2 + t)} &= \sqrt{1+\sin^2(t)} \\
&= \sqrt{1 + \Big(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\Big)^2} \\
&= \sqrt{1 + t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4)} \\
&= 1 + \frac{t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4)}{2} - \frac{(t^2 + o(t^2))^2}{8} + o(t^4) \\
&= 1 + \frac{t^2}{2} - \frac{7t^4}{24} + o(t^4).
\end{aligned}$$

Quindi

$$T_4(x) = 1 + \frac{(x - \frac{3\pi}{2})^2}{2} - \frac{7(x - \frac{3\pi}{2})^4}{24} + o((x - 3\pi/2)^4).$$

Esercizio 3.a. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\arcsin(x) - x^2}{\sqrt{1+3x^4} - 1}.$$

Per $x \to 0$,
$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{e} \quad \sqrt{1+3x^4} = 1 + \frac{3x^4}{2} + o(x^4).$$

Quindi
$$\begin{aligned}
\frac{x\arcsin(x) - x^2}{\sqrt{1+3x^4} - 1} &= \frac{x\Big(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) - x^2}{1 + \frac{3x^4}{2} + o(x^4) - 1} \\
&= \frac{\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{\frac{3x^4}{2} + o(x^4)} \\
&= \frac{\frac{1}{6} + o(1)}{\frac{3}{2} + o(1)} \to \frac{1/6}{3/2} = \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.b. Calcolare
$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^x - x}{\log^3(x)} - \frac{1}{\log(x)} \right).$$

Per $x \to 1$, $t = x - 1 \to 0$ e $\log(x) = \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ Inoltre dall'es. 2.e, $x^x = 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{2} + o(t^3)$. Quindi
$$\begin{aligned}
\frac{x^x - x}{\log^3(x)} - \frac{1}{\log(x)} &= \frac{x^x - x - \log^2(x)}{\log^3(x)} \\
&= \frac{1 + t + t^2 + \frac{t^3}{2} + o(t^3) - (1+t) - \big(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\big)^2}{(t + o(t))^3} \\
&= \frac{t^2 + \frac{t^3}{2} + o(t^3) - \big(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\big)^2}{t^3 + o(t^3)} \\
&= \frac{t^2 + \frac{t^3}{2} + o(t^3) - (t^2 - t^3 + o(t^3))}{t^3 + o(t^3)} \\
&= \frac{\frac{3t^3}{2} + o(t^3))}{t^3 + o(t^3)} \\
&= \frac{\frac{3}{2} + o(1))}{1 + o(1)} \to \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.c. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cos(5/x)-(x^2-x-3)e^{1/x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}.$$

Notiamo che per $x\to+\infty$,

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\to e^{-1}.$$

Inoltre ponendo $t=1/x\to 0^+$,

$$\begin{aligned}
x^2\cos(5/x)-(x^2-x-3)e^{1/x} &= \frac{1}{t^2}\left(\cos(5t)-(1-t-3t^2)e^t\right)\\
&= \frac{1}{t^2}\left(1-\frac{25t^2}{2}+o(t^2)-(1-t-3t^2)\left(1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)\right)\\
&= \frac{\left(-\frac{25}{2}+1-\frac{1}{2}+3\right)t^2+o(t^2)}{t^2}\to -9.
\end{aligned}$$

Quindi il limite richiesto vale $-9e$.

Esercizio 3.d. Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\sin(x)+\log(1-x+x^2)\right)^{1/x^2}.$$

Per $x\to 0$,

$$\begin{aligned}
\left(1+\sin(x)+\log(1-x+x^2)\right)^{1/x^2} &= \left(1+(x+o(x^2))+(-x+x^2)-\frac{(-x+x^2)^2}{2}+o(x^2)\right)^{1/x^2}\\
&= \left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^{1/x^2}\\
&= \exp\left(\frac{1}{x^2}\log\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\to\sqrt{e}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.e. Calcolare
$$\lim_{x\to\pi/4}\left(\frac{2}{\tan(x)-1}-\frac{1}{\sqrt{2}\sin(x)-1}\right).$$

Sia $t = x - \pi/4$, allora
$$\sqrt{2}\sin(x) = \sqrt{2}\sin(t+\pi/4) = \sin(t)+\cos(t) = 1+t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$
e
$$\begin{aligned}\tan(x) = \tan(t+\pi/4) = \frac{1+\tan(t)}{1-\tan(t)} &= (1+t+o(t^2))(1-(t+o(t^2)))^{-1}\\ &= (1+t+o(t^2))(1+(t+o(t^2))+(t+o(t^2))^2+o(t^2))\\ &= (1+t+o(t^2))(1+t+t^2+o(t^2)) = 1+2t+2t^2+o(t^2).\end{aligned}$$

Così, per $t\to 0$, abbiamo che
$$\begin{aligned}\frac{2}{\tan(x)-1}-\frac{1}{\sqrt{2}\sin(x)-1} &= \frac{2}{2t+2t^2+o(t^2)}-\frac{1}{t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)}\\ &= \frac{2t-t^2-2t-2t^2+o(t^2)}{2t^2+o(t^2)} \to -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Esercizio 3.f. Calcolare
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\cos(2\sin(x))-\cos(2x))}{x^5+x^2-\sin(x^2)-x^5e^{-x}}.$$

Per $x\to 0$, abbiamo che,
$$\begin{aligned}\cos(2\sin(x)) &= \cos\left(2x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)\right)\\ &= 1-\frac{1}{2}\left(2x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)\right)^2+\frac{1}{24}\left(2x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)\right)^4+o(x^4)\\ &= 1-\frac{1}{2}\left(4x^2-\frac{4x^4}{3}+o(x^4)\right)+\frac{1}{24}\left(16x^4+o(x^4)\right)+o(x^4)\\ &= 1-2x^2+\frac{4x^4}{3}+o(x^4).\end{aligned}$$

Così
$$\begin{aligned}\frac{x^2(\cos(2\sin(x))-\cos(2x))}{x^5+x^2-\sin(x^2)-x^5e^{-x}} &= \frac{x^2\left(1-2x^2+\frac{4x^4}{3}-1+\frac{(2x)^2}{2}-\frac{(2x)^4}{24}+o(x^4)\right)}{x^5+x^2-(x^2-\frac{x^6}{6}+o(x^6))-x^5(1-x+o(x))}\\ &= \frac{\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)x^6+o(x^6)}{\left(\frac{1}{6}+1\right)x^6+o(x^6)} \to \frac{4}{7}.\end{aligned}$$

Esercizio 3.g. Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\log^2(\sin(x)+\frac{1}{x})}{\sqrt{1+2x\log(x)}-1-x\log(x)}.$$

Per $x \to 0^+$, il numeratore è

$$\begin{aligned}
x^2\log^2(\sin(x)+1/x) &= x^2\left(-\log(x)+\log(x\sin(x)+1)\right)^2 \\
&= x^2\log^2(x)\left(-1+\frac{\log(x\sin(x)+1)}{\log(x)}\right)^2 \\
&= x^2\log^2(x)\left(-1+\frac{\log(1+x^2+o(x^2))}{\log(x)}\right)^2 \\
&= x^2\log^2(x)\left(-1+\frac{x^2+o(x^2)}{\log(x)}\right)^2 \\
&= x^2\log^2(x)(-1+o(1))^2 \\
&= x^2\log^2(x)(1+o(1)).
\end{aligned}$$

Dato che $x\log(x) \to 0$, il denominatore è

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+2x\log(x)}-1-x\log(x) &= -\frac{(2x\log(x))^2}{8}+o(x^2\log^2(x)) \\
&= -\frac{x^2\log^2(x)}{2}+o(x^2\log^2(x)).
\end{aligned}$$

Quindi per $x \to 0^+$

$$\begin{aligned}
\frac{x^2\log^2(\sin(x)+\frac{1}{x})}{\sqrt{1+2x\log(x)}-1-x\log(x)} &= \frac{x^2\log^2(x)(1+o(1))}{-\frac{x^2\log^2(x)}{2}+o(x^2\log^2(x))} \\
&= \frac{1+o(1)}{-\frac{1}{2}+o(1)} \to -2.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.h. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2(x)\,(x+4)^x}{(x+\log(x))^x - x^{x+1}}.$$

Per $x \to +\infty$, $\log^n(x)/x \to 0$ per ogni $n \geq 0$ e quindi

$$\begin{aligned}
(x+\log(x))^x &= x^x\exp\left(x\log\left(1+\frac{\log(x)}{x}\right)\right) \\
&= x^x\exp\left(x\Big(\frac{\log(x)}{x}-\frac{\log^2(x)}{2x^2}+o\Big(\frac{\log^2(x)}{x^2}\Big)\Big)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^x \exp\Big(\log(x) - \frac{\log^2(x)}{2x} + o\Big(\frac{\log^2(x)}{x}\Big)\Big)\\
&= x^{x+1} \exp\Big(-\frac{\log^2(x)}{2x} + o\Big(\frac{\log^2(x)}{x}\Big)\Big)\\
&= x^{x+1}\Big(1 - \frac{\log^2(x)}{2x} + o\Big(\frac{\log^2(x)}{x}\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

da cui segue che

$$
\begin{aligned}
\frac{\log^2(x)\,(x+4)^x}{(x+\log(x))^x - x^{x+1}} &= \frac{\log^2(x)\,x^x(1+\frac{4}{x})^x}{x^{x+1}\Big(1 - \frac{\log^2(x)}{2x} + o\Big(\frac{\log^2(x)}{x}\Big)\Big) - x^{x+1}}\\
&= \frac{\frac{\log^2(x)}{x}\,(1+\frac{4}{x})^x}{-\frac{\log^2(x)}{2x} + o\Big(\frac{\log^2(x)}{x}\Big)}\\
&= \frac{(1+\frac{4}{x})^x}{-\frac{1}{2}+o(1)} \to -2e^4.
\end{aligned}
$$

Esercizio 4.a. Determinare quale punto P lungo la parabola $y = 1 + x^2$ ha distanza minima dal punto $Q = (5, 0)$

Un generico punto P lungo la parabola $y = 1 + x^2$ ha coordinate $(x, 1 + x^2)$ con x che varia in $\mathbb{R}$. La funzione distanza di P da Q è

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{(x-5)^2 + (1 + x^2 - 0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 1 + 2x^2 + x^4} \\ &= \sqrt{x^4 + 3x^2 - 10x + 26}. \end{aligned}$$

Osserviamo che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ in quanto

$$(x-5)^2 + (1+x^2)^2 \geq (1+x^2)^2 \geq 1 > 0.$$

La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{4x^3 + 6x - 10}{2\sqrt{x^4 + 3x^2 - 10x + 26}}.$$

Si nota che il numeratore si annulla in 1 dividendo per $(x - 1)$ is ottiene la fattorizzazione

$$4x^3 + 6x - 10 = 2(x-1)(2x^2 + 2x + 5)$$

Dato che il $2x^2 + 2x + 5 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ se ne deduce che f' è positiva in $(1, +\infty)$ e negativa in $(-\infty, 1)$. Dunque f è crescente in $[1, +\infty)$ e decrescente in $(-\infty, 1]$ e possiamo concludere che $x = 1$ è un punto di minimo assoluto per la funzione distanza f.
Così il punto P di minima distanza da Q è $(1, 1 + 1^2) = (1, 2)$, il valore della distanza minima è $f(1) = \sqrt{20}$.

Esercizio 4.b. Determinare per ogni $b \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{b}{x} = \exp\left(\frac{|x-1|}{x}\right).$$

L'equazione data è equivalente a $f(x) = b$ dove

$$f(x) = x\exp\left(\frac{|x-1|}{x}\right).$$

Il dominio di f è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per $x \to +\infty$,

$$f(x) = xe^{(x-1)/x} = xe \cdot e^{-1/x} = xe\,(1 - 1/x + o(1/x)) = e(x-1) + o(1).$$

Analogamente per $x \to -\infty$,

$$f(x) = xe^{(1-x)/x} = xe^{-1} \cdot e^{1/x} = xe^{-1}\,(1 + 1/x + o(1/x)) = e^{-1}(x+1) + o(1).$$

Quindi gli asintoti a $+\infty$ e $-\infty$ sono rispettivamente $y = e(x-1)$ e $y = e^{-1}(x+1)$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} x\exp\left(\frac{|x-1|}{x}\right) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} x\exp\left(\frac{|x-1|}{x}\right) = 0.$$

La derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\ \dfrac{x+1}{x} & \text{se } x \in (1, +\infty), \\ \\ \exp\left(\dfrac{1-x}{x}\right)\ \dfrac{x-1}{x} & \text{se } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1). \end{cases}$$

Quindi f è crescente in $(-\infty, 0)$ e in $[1, +\infty)$ ed è decrescente in $(0, 1]$. La funzione non è derivabile in 1 dove c'è un punto angoloso con

$$f'_-(1) = 0 \quad \text{e} \quad f'_+(1) = 2.$$

Il punto $x = 1$ è di minimo relativo. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.

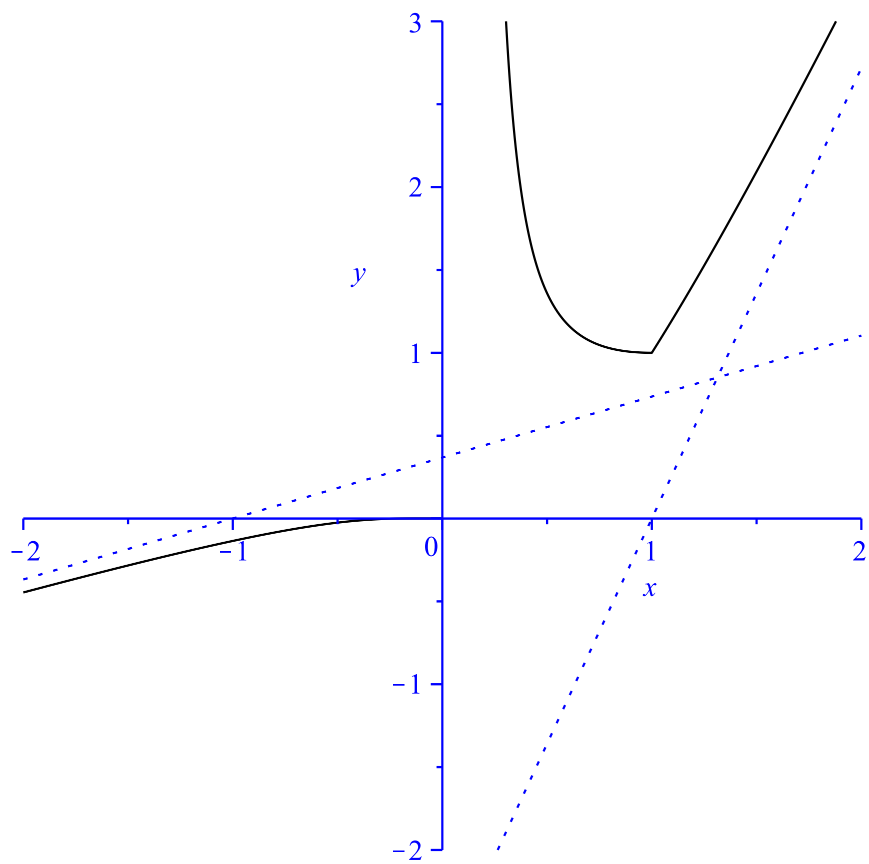

Grafico di $f(x) = x \exp\left(\dfrac{|x-1|}{x}\right)$

In base al grafico di f possiamo concludere che il numero di soluzioni dell'equazione data è

$$\begin{cases} 2 & \text{se } b > 1 \text{ con } x_1 \in (0,1) \text{ e } x_2 \in (1, +\infty), \\ 1 & \text{se } b = 1 \text{ con } x_1 = 1, \text{ oppure se } b < 0, \text{ con } x_1 \in (-\infty, 0), \\ 0 & \text{se } 0 \le b < 1. \end{cases}$$