Analisi Matematica 1
Foglio di esercizi n. 6
SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = (|x+1|+1)e^{1/x}$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti e i punti di non derivabilità.

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e la funzione è sempre positiva. Per $x \to +\infty$,

$$f(x) = (x+2)e^{1/x} = (x+2)\left(1 + 1/x + o(1/x)\right) = x + 3 + o(1)$$

mentre per $x \to -\infty$,

$$f(x) = -xe^{1/x} = -x\left(1 + 1/x + o(1/x)\right) = -x - 1 + o(1).$$

Quindi gli asintoti a $\pm\infty$ sono rispettivamente $y = x + 3$ e $y = -x - 1$.
Inoltre

$$\lim_{x \to 0^-} (|x+1|+1)e^{1/x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} (|x+1|+1)e^{1/x} = +\infty.$$

Per $x \in D$ e $x > -1$ la derivata è

$$f'(x) = (x+1)(x-2)\frac{e^{1/x}}{x^2},$$

mentre per $x \in D$ e $x < -1$ la derivata è

$$f'(x) = (1-x)\frac{e^{1/x}}{x}.$$

La funzione non è derivabile in -1 dove c'è un punto angoloso con

$$f'_-(-1) = -2e^{-1} \quad \text{e} \quad f'_+(-1) = 0.$$

Inoltre $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$. Dal segno della derivata prima si ha che f è crescente in $[2, +\infty)$ ed è decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, 2]$. Il punto $x = 2$ è di minimo relativo. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.

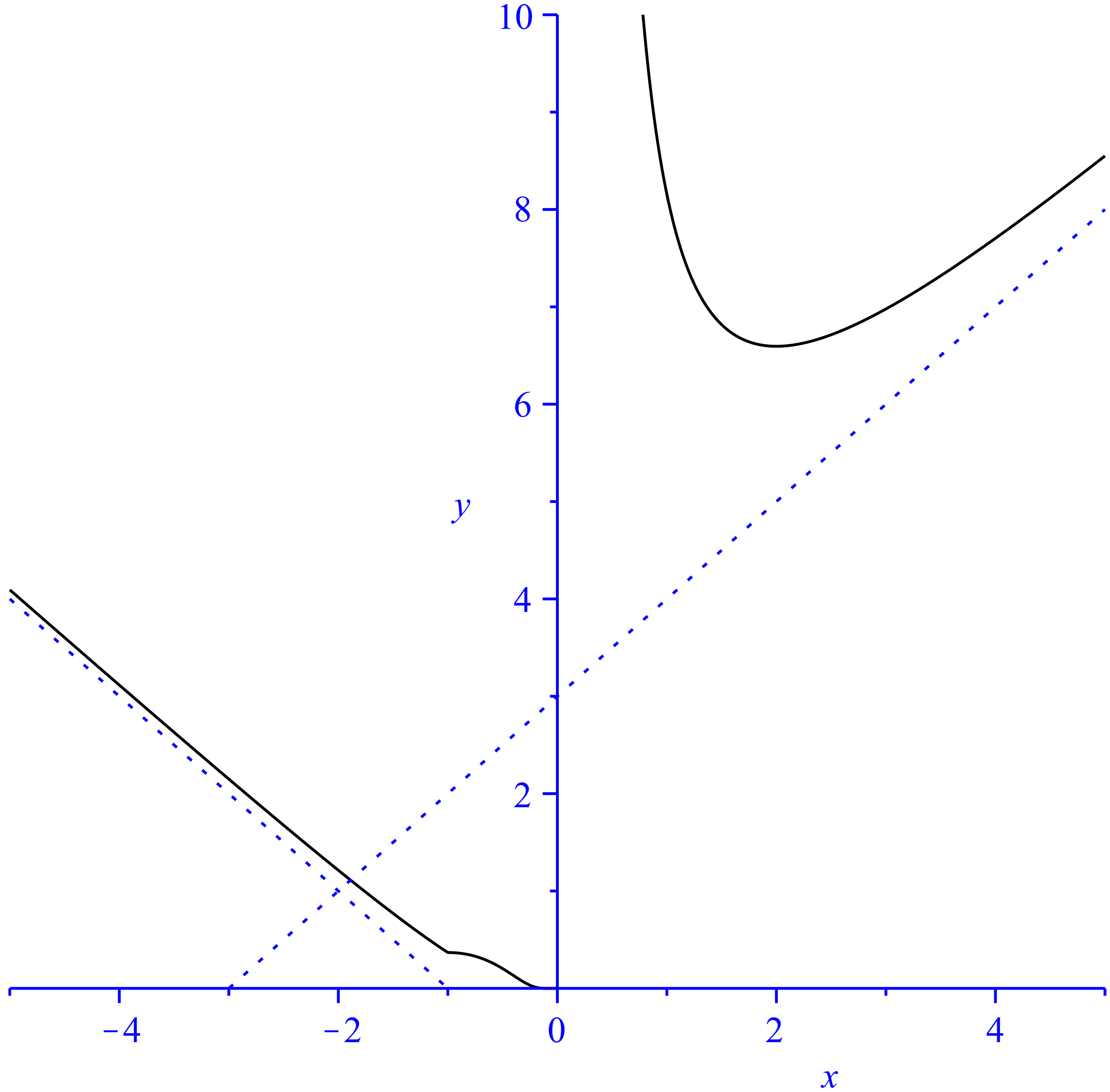


Grafico di $f(x) = (|x+1|+1)e^{1/x}$

Esercizio 1.b. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan\left(|x| + \frac{1}{x}\right)$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti e i punti di non derivabilità.

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per $|x| \to +\infty$, la funzione tende a $\pi/2$ e quindi l'asintoto a $\pm\infty$ è $y = \pi/2$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \arctan\left(|x| + \frac{1}{x}\right) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Per $x \in D$, la derivata prima è

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^4+3x^2+1} & \text{se } x > 0, \\[2ex] -\dfrac{x^2+1}{x^4-x^2+1} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Dal segno della derivata prima si ha che f è crescente in $[1, +\infty)$ ed è decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $[1, +\infty)$. Il punto $x = 1$ è un punto di minimo relativo. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.

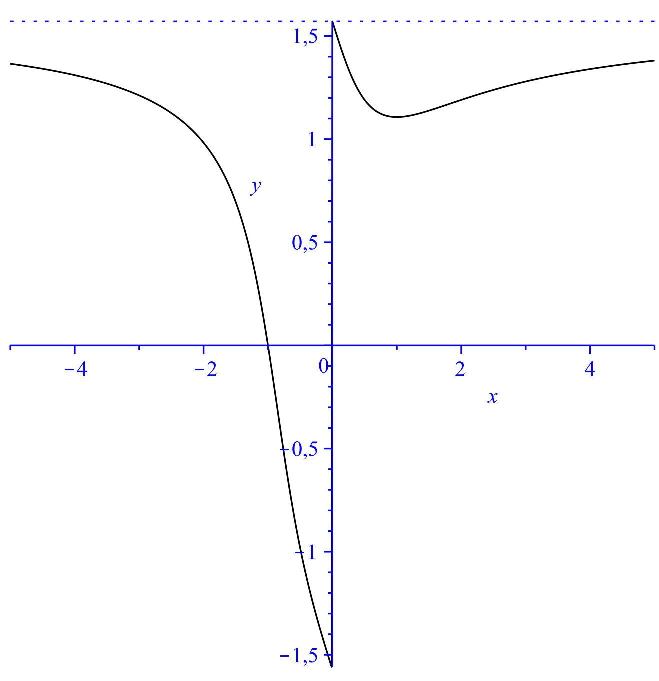


Grafico di $f(x) = \arctan\left(|x| + \dfrac{1}{x}\right)$

Esercizio 2.a. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{-2x^2} + 1 - |x|$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Il dominio è $D = \mathbb{R}$ e la funzione è pari. Per $x \to \pm\infty$,

$$f(x) = 1 - |x| + o(1).$$

e quindi gli asintoti a $\pm\infty$ sono rispettivamente $y = 1 - x$ e $y = 1 + x$.
La funzione è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, e per $x > 0$

$$f'(x) = -4xe^{-2x^2} - 1.$$

La derivata prima è sempre negativa per $x > 0$ e quindi f è decrescente in $[0, +\infty)$ ed è crescente in $(-\infty, 0)$. La funzione non è derivabile in 0 dove c'è un punto angoloso con

$$f'_-(0) = 1 \quad f'_+(0) = -1.$$

Il punto $x = 0$ è di massimo assoluto. Non ci sono punti di minimo assoluto.
La derivata seconda è

$$f''(x) = 4e^{-2x^2}(4x^2 - 1)$$

e studiando il segno di f'' abbiamo che la funzione è convessa in $[1/2, +\infty)$ e in $(-\infty, -1/2]$ mentre è concava in $[-1/2, 1/2]$. I punti $x = -1/2$ e $x = 1/2$ sono dei flessi.

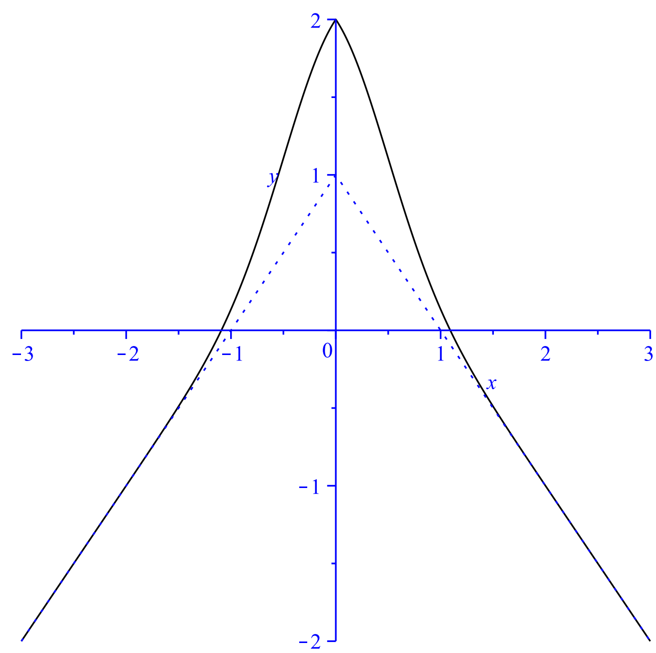


Grafico di $f(x) = e^{-2x^2} + 1 - |x|$

Esercizio 2.b. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{2|x|^3}{x^2 - 4}$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

La funzione è pari con dominio $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Per $|x| \to +\infty$,

$$f(x) = \frac{2|x|}{1 - 4/x^2} = 2|x| \left(1 + 4/x^2 + o(1/x^2)\right) = 2|x| + o(1).$$

Quindi gli asintoti a $\pm\infty$ sono rispettivamente $y = \pm 2x$.
Inoltre

$$\lim_{x \to 2^\pm} \frac{2|x|^3}{x^2 - 4} = \pm\infty.$$

Per $x \geq 0$, la derivata prima è

$$f'(x) = \frac{2x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}.$$

Si noti che la funzione è derivabile in D (anche in $x = 0$) e per $x \in [0, 2) \cup (2, +\infty)$,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 12 \Leftrightarrow x \geq 2\sqrt{3}.$$

Quindi per $x \geq 0$, f è crescente in $[2\sqrt{3}, +\infty)$ ed è decrescente in in $[0, 2)$ e $(2, 2\sqrt{3}]$. I punti $x = \pm 2\sqrt{3}$ sono di minimo relativo mentre $x = 0$ è un punto di massimo relativo. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.
Per $x \geq 0$ derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{8x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$$

e studiando il segno di f'' abbiamo che la funzione è convessa in $(2, +\infty)$. mentre è concava in $[0, 2)$. Non ci sono punti di flesso.

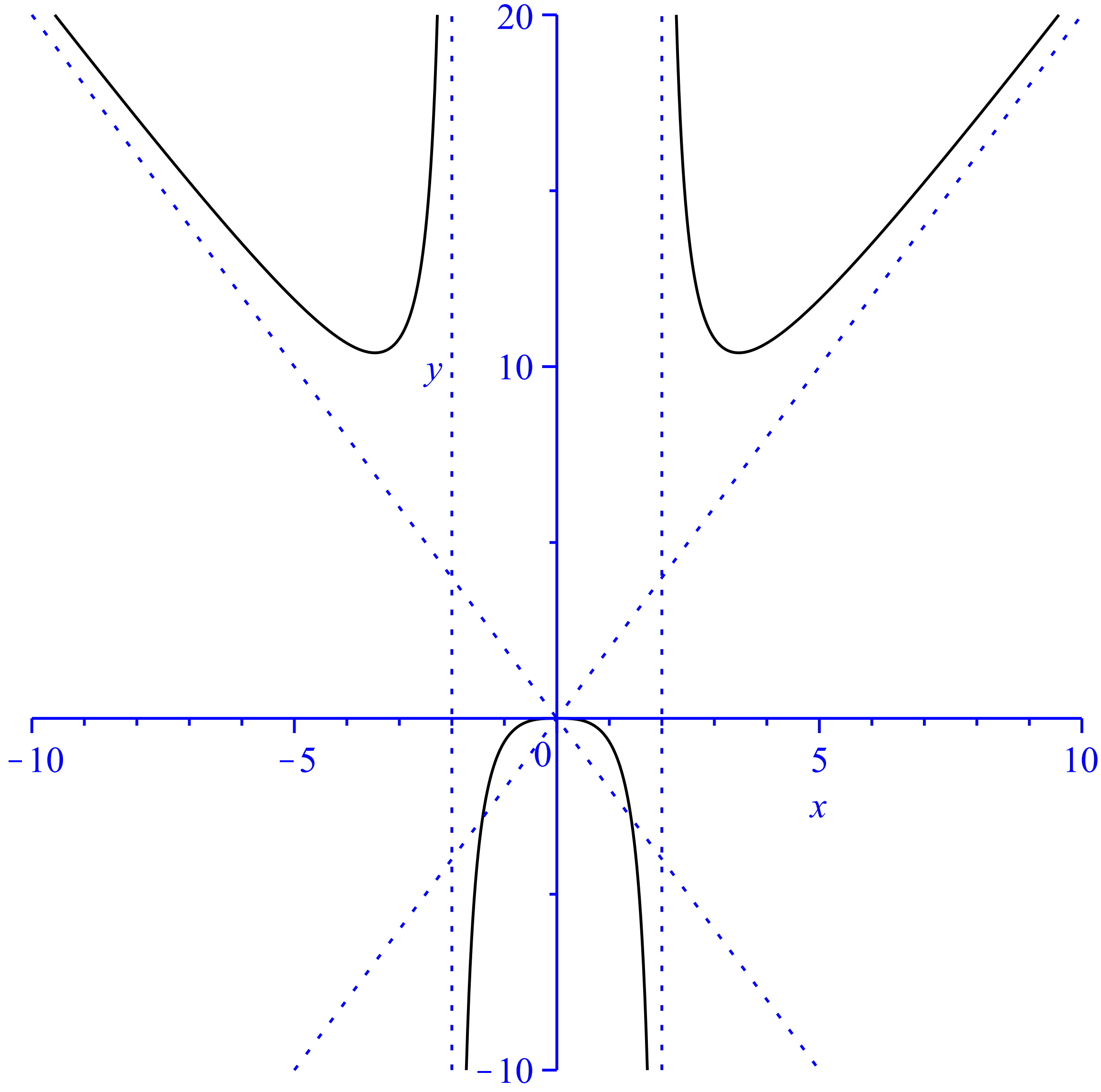


Grafico di $f(x) = \dfrac{2|x|^3}{x^2 - 4}$

Esercizio 3.a. Calcolare
$$\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\pi - 3\arcsin(x/2)}{\pi - 3\arctan(x)}.$$

Il limite è della forma 0/0 e applicando de L'Hopital abbiamo che

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\pi - 3\arcsin(x/2)}{\pi - 3\arctan(x)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{0 - \frac{3/2}{\sqrt{1-(x/2)^2}}}{0 - \frac{3}{1+x^2}} = \frac{-3}{-3/4} = 4.$$

Esercizio 3.b. Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi - 2\arctan(5x)}{e^{-2/x} - \sqrt{1-\frac{1}{x}}}.$$

Il limite è della forma 0/0 e applicando de L'Hopital abbiamo che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi - 2\arctan(5x)}{e^{-2/x} - \sqrt{1-\frac{1}{x}}} &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{0 - \frac{10}{1+25x^2}}{\frac{2e^{-2/x}}{x^2} - \frac{1}{2x^2\sqrt{1-1/x}}} \\ &= -\lim_{x\to+\infty} \frac{10x^2}{1+25x^2} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2e^{-2/x} - \frac{1}{2\sqrt{1-1/x}}} \\ &= -\frac{10}{25} \cdot \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = -\frac{4}{15}.\end{aligned}$$

Esercizio 3.c. Calcolare
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\cos(\pi/x)}{(\arccos(2/x))^2}.$$

Il limite è della forma 0/0. Poniamo $t = 2/x \to 1^-$ (sostituzione non necessaria che però semplifica i conti) e applichiamo de L'Hopital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+} \frac{\cos(\pi/x)}{(\arccos(2/x))^2} = \lim_{t\to 1^-} \frac{\cos(\pi t/2)}{(\arccos(t))^2} &\overset{\text{H}}{=} \lim_{t\to 1^-} \frac{-(\pi/2)\sin(\pi t/2)}{-\frac{2\arccos(t)}{\sqrt{1-t^2}}} \\ &= \frac{\pi}{4} \lim_{t\to 1^-} \sin(\pi t/2) \cdot \lim_{t\to 1^-} \frac{\sqrt{1-t^2}}{\arccos(t)} \\ &\overset{\text{H}}{=} \frac{\pi}{4} \lim_{t\to 1^-} \frac{\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}}{-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}} = \frac{\pi}{4} \lim_{t\to 1^-} t = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Esercizio 3.d. Calcolare
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{e}{e^x-e}-\frac{1}{\log(x)}\right).$$

Dopo aver effettuato la sottrazione, il limite è della forma 0/0 e applicando de L'Hopital si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{e}{e^x-e}-\frac{1}{\log(x)}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{e\log(x)-(e^x-e)}{\log(x)(e^x-e)}\\
&\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{e}{x}-e^x}{\frac{e^x-e}{x}+\log(x)e^x}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{e-xe^x}{e^x-e+x\log(x)e^x}\\
&\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{0-e^x-xe^x}{e^x-0+\log(x)e^x+e^x+x\log(x)e^x} = \frac{-2e}{2e} = -1.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.a. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di ordine $n = 3$ della funzione

$$f(x) = \arcsin(x).$$

Le prime tre derivate della funzione $f(x) = \arcsin(x)$ sono

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1-x^2)^{-1/2}, \\ f''(x) &= x(1-x^2)^{-3/2}, \\ f'''(x) &= (1-x^2)^{-3/2} + 3x^2(1-x^2)^{-5/2}. \end{aligned}$$

Per $x_0 = 0$ e $n = 3$ abbiamo che, per definizione,

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = x + \frac{x^3}{6}.$$

Esercizio 4.b. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di ordine $n = 3$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}.$$

Ricordiamo che

$$(1+t)^a = 1 + at + \frac{a(a-1)}{2}\, t^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6}\, t^3 + o(t^3).$$

Allora, per $t = 4x$, $a = -1/2$ e $n = 3$ abbiamo che,

$$T_3(x) = 1 - 2x + 6x^2 - 20x^3.$$

Esercizio 4.c. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 1$ di ordine $n = 4$ della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x}{2-x}\right).$$

Le prime quattro derivate della funzione $f(x) = \log\left(\frac{x}{2-x}\right) = \log(x) - \log(2-x)$ sono

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2-x)^2}, \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3} + \frac{2}{(2-x)^3}, \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4} + \frac{6}{(2-x)^4}. \end{aligned}$$

Per $x_0 = 1$ e $n = 4$ abbiamo che, per definizione,

$$T_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}\,(x-1)^k = 2(x-1) + \frac{2}{3}(x-1)^3.$$

Esercizio 4.d. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di ordine $n = 3$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2 - e^{-x}}.$$

Le prime tre derivate della funzione $f(x) = \frac{1}{2-e^{-x}}$ sono

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{e^{-x}}{(2-e^{-x})^2},\\
f''(x) &= \frac{e^{-x}}{(2-e^{-x})^2} + \frac{2e^{-2x}}{(2-e^{-x})^3},\\
f'''(x) &= -\frac{e^{-x}}{(2-e^{-x})^2} - \frac{6e^{-2x}}{(2-e^{-x})^3} - \frac{6e^{-3x}}{(2-e^{-x})^4}.
\end{aligned}$$

Per $x_0 = 0$ e $n = 3$ abbiamo che, per definizione,

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k = 1 - x + \frac{3x^2}{2} - \frac{13x^3}{6}.$$

Esercizio 4.e Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = \pi/4$ di ordine $n = 3$ della funzione

$$f(x) = \tan(x).$$

Le prime tre derivate della funzione $f(x) = \tan(x)$ sono

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 + \tan^2(x),\\
f''(x) &= 2\tan(x)(1+\tan^2(x)) = 2\tan(x) + 2\tan^3(x),\\
f'''(x) &= 2(1+\tan^2(x)) + 6\tan^2(x)(1+\tan^2(x)).
\end{aligned}$$

Per $x_0 = \pi/4$ e $n = 3$ abbiamo che, per definizione,

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(\pi/4)}{k!}\,(x-\pi/4)^k\\
&= 1 + 2(x-\pi/4) + 2(x-\pi/4)^2 + \frac{8}{3}(x-\pi/4)^3.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.f Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di ordine $n = 4$ della funzione
$$f(x) = \log(\cos(x)).$$

Le prime quattro derivate della funzione $f(x) = \log(\cos(x))$ sono

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x), \\
f''(x) &= -1 - \tan^2(x), \\
f'''(x) &= -2\tan(x) - 2\tan^3(x), \\
f^{(4)}(x) &= -2(1 + \tan^2(x)) - 6\tan^2(x)(1 + \tan^2(x)).
\end{aligned}$$

Per $x_0 = 0$ e $n = 4$ abbiamo che, per definizione,

$$T_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}.$$

Esercizio 5.a. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)-\sin(x)}{x\log(\cos(x))}.$$

Dagli esercizi 4.a and 4.f abbiamo che per $x \to 0$,

$$\frac{\arcsin(x)-\sin(x)}{x\log(\cos(x))} = \frac{\Big(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\Big)-\Big(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\Big)}{x\Big(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\Big)} = \frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{2}+o(x^3)} \to -\frac{2}{3}.$$

Esercizio 5.b. Calcolare
$$\lim_{x\to \pi/4} (\tan(x))^{\frac{1}{4x-\pi}}.$$

Dall esercizio 4.e abbiamo che per $x \to \frac{\pi}{4}$, $t = x - \frac{\pi}{4} \to 0$ e

$$\begin{aligned}
(\tan(x))^{\frac{1}{4x-\pi}} &= (1+2(x-\pi/4)+o(x-\pi/4))^{\frac{1}{4x-\pi}} \\
&= (1+2t+o(t))^{\frac{1}{4t}} = \exp\left(\frac{1}{4t}\log(1+2t+o(t))\right) \\
&= \exp\left(\frac{2t+o(t)}{4t}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}+o(1)\right) \to \sqrt{e}.
\end{aligned}$$

Esercizio 6.a. Fare un esempio di un polinomio $ax^4 - bx^2$ con almeno due punti di flesso tale che le rette tangenti in tali punti siano ortogonali.

Sia $f(x) = ax^4 - bx^2$ con a e b coefficienti da determinare. Allora

$$f'(x) = 4ax^3 - 2bx = 2x(2ax^2 - b), \qquad f''(x) = 12ax^2 - 2b = 2(6ax^2 - b)$$

quindi se $b > 0$ e $a > 0$, $x_+ = \sqrt{\frac{b}{6a}}$ e $x_- = -\sqrt{\frac{b}{6a}}$ sono due punti di flesso. I coefficienti angolari nei due punti sono: $f'(x_+)$ e $f'(x_-)$. Quindi le due rette tangenti sono ortogonali se $f'(x_+) \cdot f'(x_-) = -1$. Abbiamo che

$$f'(x_+) \cdot f'(x_-) = 2x_+(2ax_+^2 - b) \cdot 2x_-(2ax_-^2 - b) = -4\frac{b}{6a}\left(\frac{b}{3} - b\right)^2 = -\frac{8b^3}{27a} = -1.$$

Ad esempio possiamo prendere $a = 8$ e ricavare $b = 3$, così il polinomio

$$f(x) = 8x^4 - 3x^2$$

ha le proprietà richieste. I punti di flesso sono $x = 1/4$ e $x = -1/4$ e le rette tangenti in tali punti sono $y = -x + \frac{3}{32}$ e $y = x + \frac{3}{32}$.

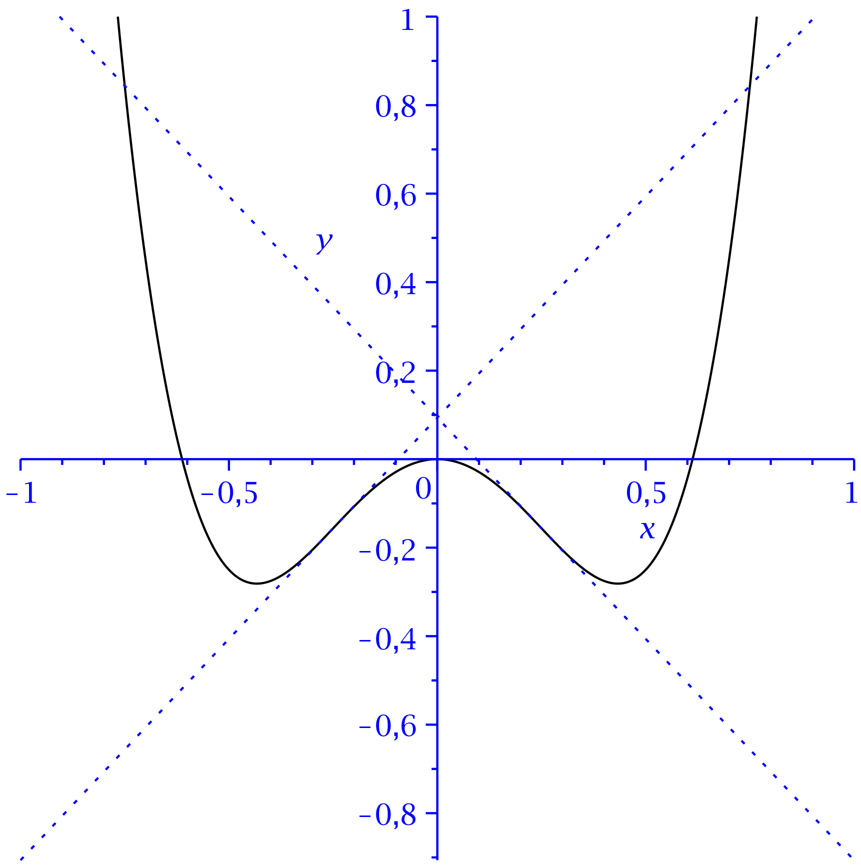


Grafico di $f(x) = 8x^4 - 3x^2$

Esercizio 6.b. Fare un esempio di una retta $y = mx + q$ che sta tra il grafico di $\log(x)$ e il grafico di $x^2/4$ ossia tale che $\forall x > 0$, $\log(x) \leq mx + q \leq \frac{x^2}{4}$.

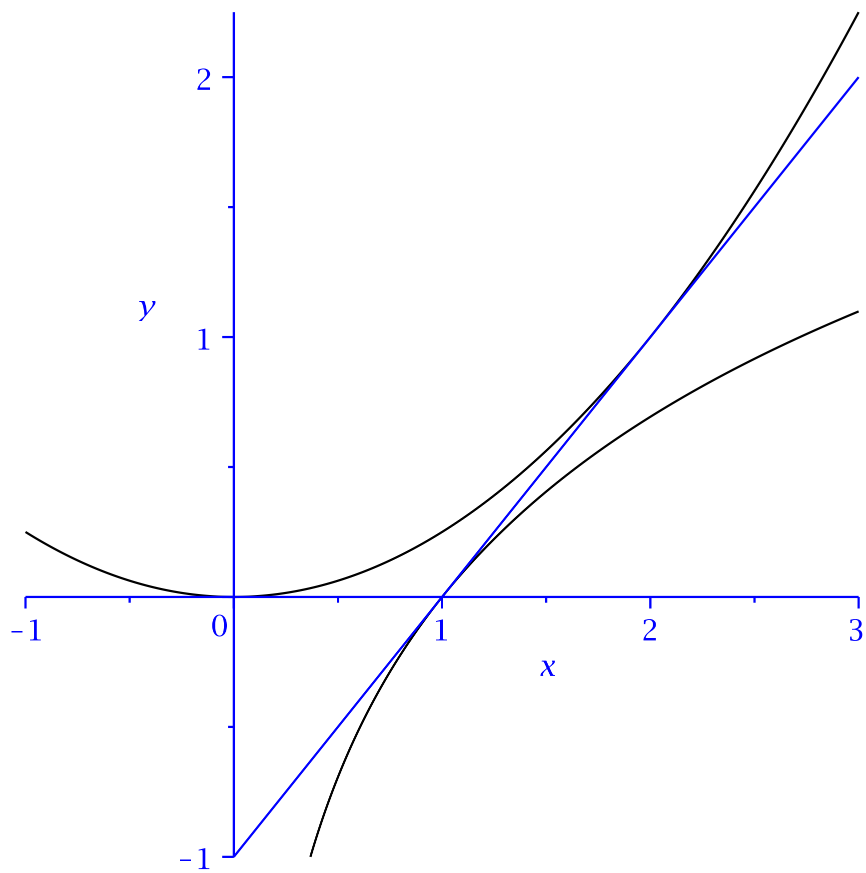
La funzione $f(x) = \log(x)$ è concava e quindi il suo grafico sta sotto le sue rette tangenti: per ogni $x_0, x > 0$:

$$\log(x) \leq y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = \frac{x - x_0}{x_0} + \log(x_0)$$

Facendo qualche esperimento, ad esempio con Desmos, si scopre che la retta tangente per $x_0 = 1$ dovrebbe stare sotto il grafico della parabola $g(x) = x^2/4$ (ci sono anche altri valori di x_0 che vanno bene). Dimostriamo tale proprietà ossia che per ogni $x > 0$,

$$x - 1 \leq \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \geq 0$$

che è vera.



$$\forall x > 0, \log(x) \leq x - 1 \leq \frac{x^2}{4}.$$ da fare