Analisi Matematica 1
Foglio di esercizi n. 5
SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\log(1+\frac{1}{x}) + 4\log(1+2^x)}{\sqrt{1+x^2}+x}.$$

Per $x \to +\infty$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
\frac{3\log(1+\frac{1}{x}) + 4\log(1+2^x)}{\sqrt{1+x^2}+x} &= \frac{3\log(1+\frac{1}{x}) + 4\log(2^x(1+2^{-x}))}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} \\
&= \frac{3\log(1+\frac{1}{x}) + 4\log(2)x + \log(1+2^{-x})}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} \\
&= \frac{3\frac{\log(1+\frac{1}{x})}{x} + 4\log(2) + \frac{\log(1+2^{-x})}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} \\
&\to \frac{3\cdot 0 + 4\log(2) + 0}{1+1} = 2\log(2).
\end{aligned}$$

Esercizio 1.b. Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3\log(1+\frac{1}{x}) + 4\log(1+2^x)}{\sqrt{1+x^2}+x}.$$

Per $x \to -\infty$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
\frac{3\log(1+\frac{1}{x}) + 4\log(1+2^x)}{\sqrt{1+x^2}+x} &= \frac{3\log(1+\frac{1}{x}) + 4\log(1+2^x)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)} \\
&= -\frac{3\,\frac{\log(1+1/x)}{1/x} + 4\,x2^x\,\frac{\log(1+2^x)}{2^x}}{\frac{\sqrt{1+1/x^2}-1}{1/x^2}} \\
&\to -\frac{3\cdot 1 + 4\cdot 0\cdot 1}{1/2} = -6.
\end{aligned}$$

Esercizio 2.a. Determinare i punti di discontinuità e i punti di non derivabilità al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 4| + b & \text{se } x < 3 \\ ax & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Per la continuità basta studiare cosa accade in $x = 3$. Affinché f sia continua dobbiamo imporre che

$$\lim_{x \to 3^-} |x^2 - 4| + b = \lim_{x \to 3^+} ax = f(3) = 3a$$

ovvero che $5 + b = 3a$.

Per la derivabilità, osserviamo che il ramo destro è regolare, mentre il ramo sinistro della funzione ha due punti di non derivabilità, ossia dei punti angolosi in $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$:

$$f'_-(-2) = -4 \quad \text{e} \quad f'_+(-2) = -4 \quad , \quad f'_-(2) = -4 \quad \text{e} \quad f'_+(2) = 4.$$

Affinché f sia derivabile in $x = 3$, è necessario che la funzione sia continua in $x = 3$, ossia $3a = 5 + b$, e

$$a = f'_+(3) = f'_-(3) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Quindi f è derivabile in 3 se e solo se $a = 6$ e $b = 13$.

Esercizio 2.b. Determinare i punti di discontinuità e i punti di non deriva-bilità al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2\arcsin(x) & \text{se } x \in [-1,1] \\ ax + bx^2 & \text{se } x \in (1,2) \\ \sqrt{|x-3|} & \text{se } x \in [2,4] \end{cases}$$

In questo caso la funzione è definita sull'intervallo $[-1, 4]$.
In $[-1,1) \cup (1,2) \cup (2,4]$ la funzione è continua. In $x = 1$, affinché la funzione sia continua si deve avere che

$$\lim_{x \to 1^+} ax + bx^2 = a + b = f(1) = \pi.$$

In $x = 2$, per la continuità dobbiamo avere che

$$\lim_{x \to 2^-} ax + bx^2 = 2a + 4b = f(2) = 1.$$

Derivabilità. La derivata di $2\arcsin(x)$ è $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$, che non è definita in $x = \pm 1$ e quindi in tali punti f non è derivabile. In particolare in $x = 1$ la derivata destra è $a + 2b$ e quindi $x = 1$ è un punto angoloso.
Nel punto $x = 2$, per la derivabilità è necessario che $2a + 4b = 1$ e

$$f'_-(2) = a + 4b = f'_+(2) = -\frac{1}{2\sqrt{3-2}} = -\frac{1}{2}.$$

Quindi f è derivabile in 2 se e solo se $a = 3/2$ e $b = -1/2$.
Infine in $x = 3$ la funzione ha ancora un punto di non derivabilità, ossia una cuspide:

$$f'_-(3) = -\infty \quad \text{e} \quad f'_+(3) = +\infty.$$

Esercizio 3.a. Determinare la retta tangente al grafico di

$$f(x) = \frac{\log(x)}{2^x + x^2}$$

nel punto $(1, f(1))$.

La derivata della funzione è

$$f'(x) = \frac{2^x + x^2 - x\log(x)(2^x \log(2) + 2x)}{x(2^x + x^2)^2}$$

e quindi $f'(1) = 1/3$. Inoltre $f(1) = 0$. Allora la retta tangente cercata è

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{x-1}{3}.$$

Esercizio 3.b. Determinare la retta tangente al grafico di

$$f(x) = \frac{\pi^2\sqrt{3+e^x}}{\arctan(x+1)}$$

nel punto $(0, f(0))$.

La derivata della funzione è

$$f'(x) = \frac{\pi^2}{\arctan^2(x+1)}\left(\frac{e^x \arctan(x+1)}{2\sqrt{3+e^x}} - \frac{\sqrt{3+e^x}}{1+(x+1)^2}\right)$$

e quindi $f'(0) = \pi - 16$. Inoltre $f(0) = 8\pi$. Allora la retta tangente cercata è

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = (\pi - 16)x + 8\pi.$$

Esercizio 4.a. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = x^{1/x}$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti e i punti di non derivabilità.

Il dominio è $D = (0, +\infty)$. I limiti agli estremi di D sono

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\log(x)/x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} e^{\log(x)/x} = 1$$

quindi $y = 1$ è l'asintoto per $x \to +\infty$.
Per $x > 0$ si ha che

$$f'(x) = \frac{x^{1/x}(1 - \log(x))}{x^2}$$

e quindi f è crescente in $(0, e]$ ed è decrescente $[e, +\infty)$. Inoltre $x = e$ è un punto di massimo assoluto. Non ci sono punti di minimo relativo.

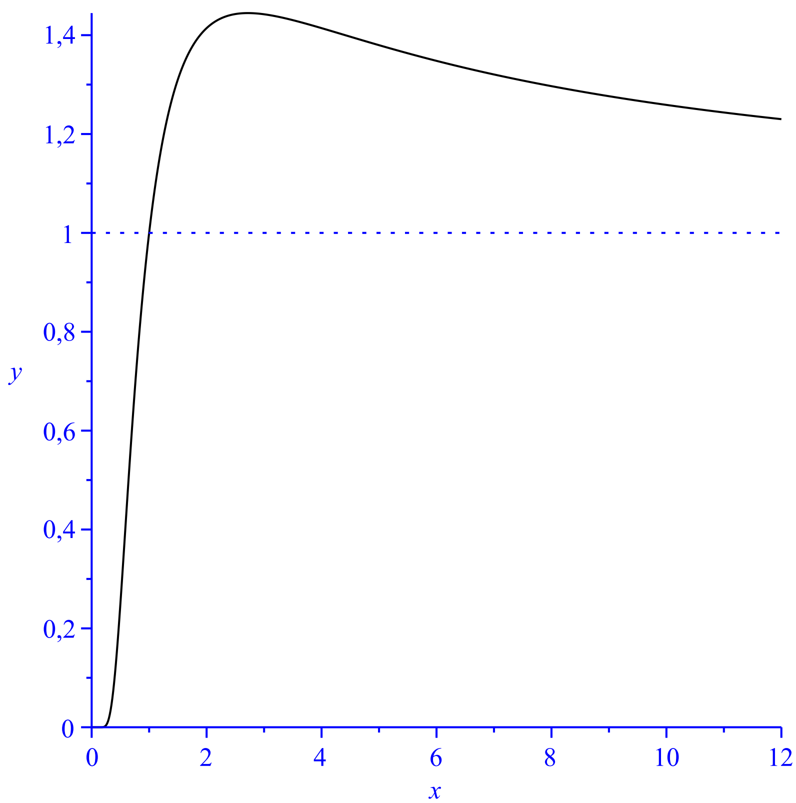

Grafico di $f(x) = x^{1/x}$

Esercizio 4.b. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{-x^2}(x^4 - 3x^2 + 1)$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti e i punti di non derivabilità.

La funzione è pari con dominio $D = \mathbb{R}$. I limiti agli estremi di D sono

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

quindi $y = 0$ è l'asintoto per $x \to \pm\infty$. Per $x \in \mathbb{R}$ si ha che

$$f'(x) = -2e^{-x^2}x(x^2 - 1)(x^2 - 4).$$

Così,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1)(x^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [-1, 0] \cup [1, 2]$$

e dunque f è crescente in $(-\infty, -2]$, in $[-1, 0]$ e in $[1, 2]$, ed è decrescente in $[-2, -1]$, in $[0, 1]$ e in $[2, +\infty)$. Confrontando i valori nei punti stazionari abbiamo che i punti $x = \pm 1$ sono di minimo assoluto mentre i punti $x = \pm 2$ sono di massimo relativo e $x = 0$ è un punto di massimo assoluto.

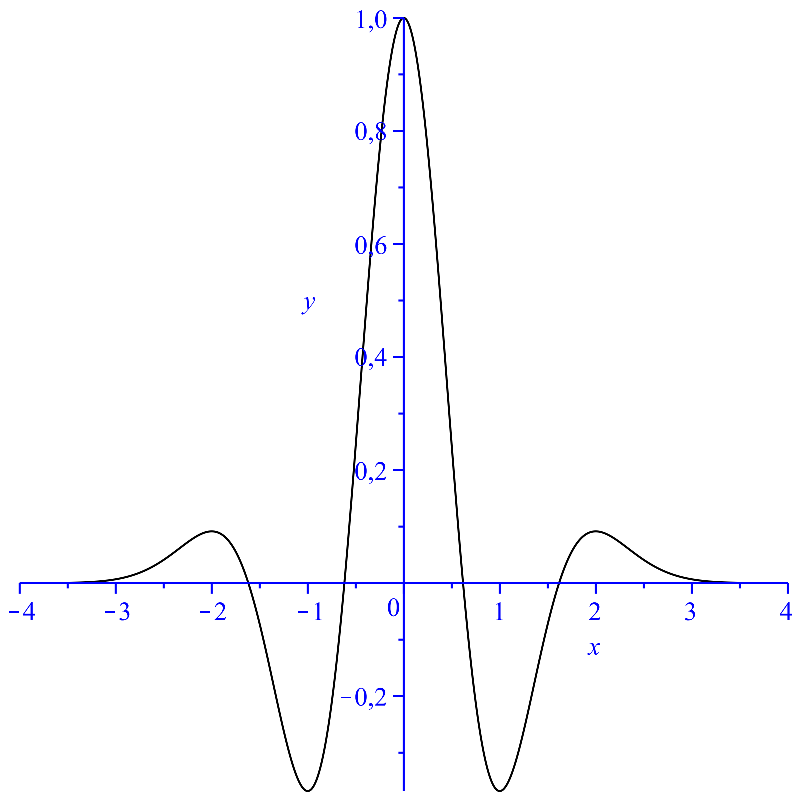

Grafico di $f(x) = e^{-x^2}(x^4 - 3x^2 + 1)$

Esercizio 5.a. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{1 - x}$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Il dominio è $D = [0, 1) \cup (1, 2]$. La funzione vale zero in $x = 0$ e $x = 2$, è negativa in $(0, 1)$, ed è positiva in $(1, 2)$. Inoltre

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{\sqrt{2x - x^2}}{1 - x} = \mp\infty.$$

La funzione è derivabile in $(0, 1) \cup (1, 2)$,

$$f'(x) = \frac{1}{(2x - x^2)^{1/2}(x - 1)^2}.$$

Studiando il segno di f' abbiamo che la funzione è crescente in $[0, 1)$ ed è decrescente in $(1, 2]$. Inoltre

$$f''(x) = \frac{1 - 6x + 3x^2}{(2x - x^2)^{3/2}(x - 1)^3}$$

e studiando il segno di f'' abbiamo che la funzione è convessa $[1 - \sqrt{2/3}, 1)$ e in $[1 + \sqrt{2/3}, 2]$ ed è concava in $[0, 1 - \sqrt{2/3}]$ e in $(1, 1 + \sqrt{2/3}]$. Il punto $x = 0$ è di minimo relativo mentre $x = 2$ è un punto di massimo relativo. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto. I punti $x = 1 - \sqrt{2/3}$ e $x = 1 + \sqrt{2/3}$ sono dei flessi.

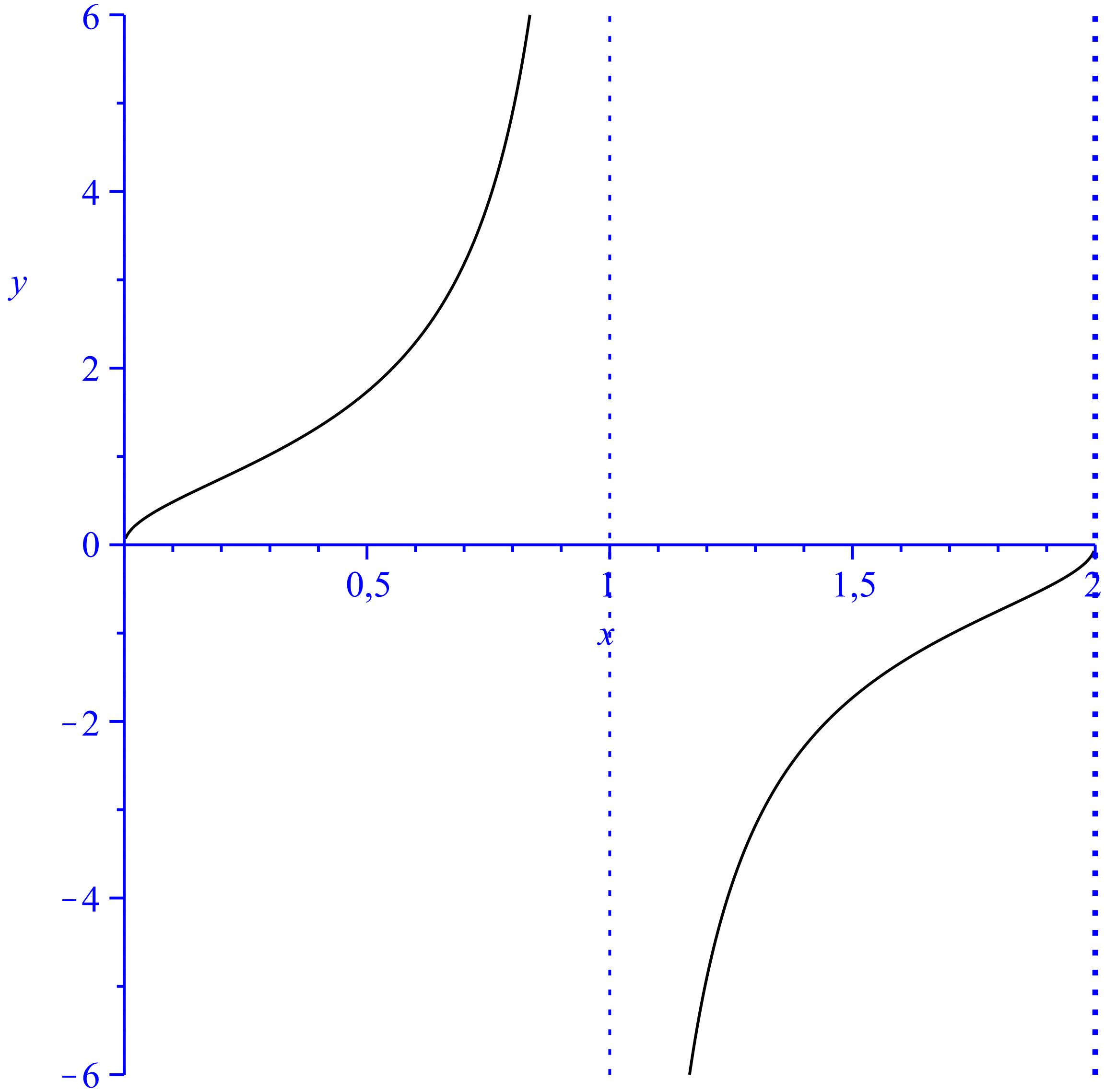

Grafico di $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x - x^2}}{1 - x}$

Esercizio 5.b. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{|x^2 - 4| - 4}{(x-2)^2}$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. La funzione è positiva in $(-\infty, -2\sqrt{2})$ e in $(2\sqrt{2}, +\infty)$, si annulla in $x = 0$, in $x = \pm 2\sqrt{2}$. Per $|x| \to +\infty$, la funzione tende a 1 e quindi l'asintoto a $\pm\infty$ è $y = 1$. Inoltre

$$\lim_{x \to 2^\pm} \frac{|x^2 - 4| - 4}{(x-2)^2} = -\infty.$$

La derivata prima è

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{4(x-4)}{(x-2)^3} & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty), \\ \dfrac{4x}{(x-2)^3} & \text{se } x \in (-2, 2). \end{cases}$$

La funzione non è derivabile in -2 dove c'è un punto angoloso

$$f'_-(-2) = -\frac{3}{8} \quad \text{e} \quad f'_+(-2) = \frac{1}{8}.$$

Dal segno della derivata prima si ha che f è crescente in $[-2, 0]$ e in $(2, 4]$ ed è decrescente in $(-\infty, -2]$, in $[0, 2)$ e in $[4, +\infty)$. Il punto $x = 4$ è di massimo assoluto e il punto $x = 0$ è di massimo relativo. Il punto $x = -2$ è di minimo relativo e non ci sono punti di minimo assoluto. La derivata seconda è

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{8(x-5)}{(x-2)^4} & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty), \\ -\dfrac{8(x+1)}{(x-2)^4} & \text{se } x \in (-2, 2). \end{cases}$$

Dal segno della derivata seconda si ha che f è convessa $[-2, -1]$ e in $[5, +\infty)$, mentre è concava in $(-\infty, -2]$, in $[-1, 2)$ e in $(2, 5]$. I punti $x = -1$ e $x = 5$ sono dei flessi.

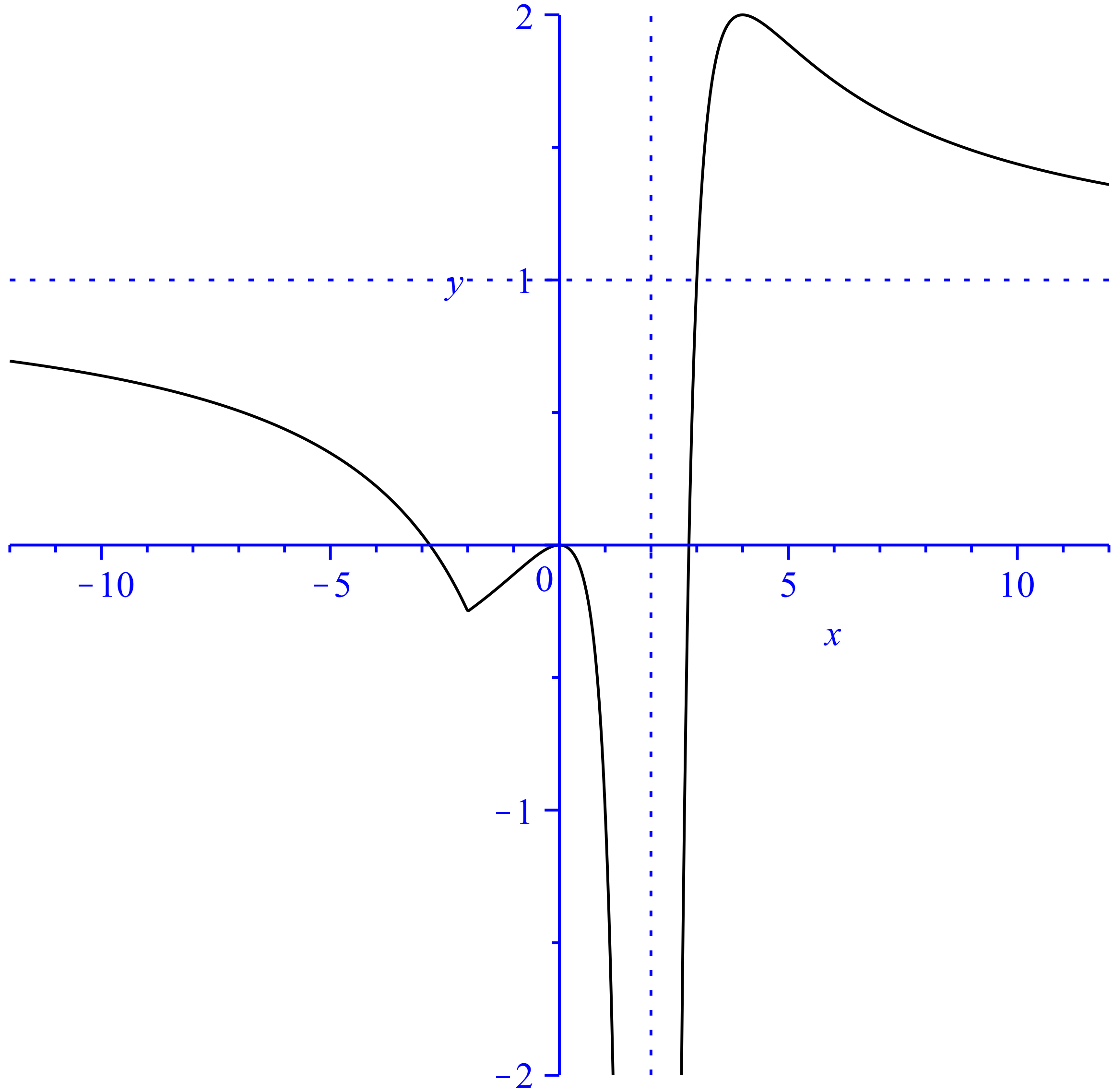

Grafico di $f(x) = \dfrac{|x^2 - 4| - 4}{(x-2)^2}$

Esercizio 6.a. Fare un esempio di una funzione derivabile e strettamente crescente in $\mathbb{R}$ con infiniti punti stazionari.

La funzione

$$f(x) = x + \sin(x)$$

ha le proprietà richieste. f è derivabile in $\mathbb{R}$ e la sua derivata è

$$f'(x) = 1 + \cos(x).$$

f ha infiniti punti stazionari: $x_k = \pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ perché $f'(x_k) = 0$. Inoltre altrove f' è positiva e quindi f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

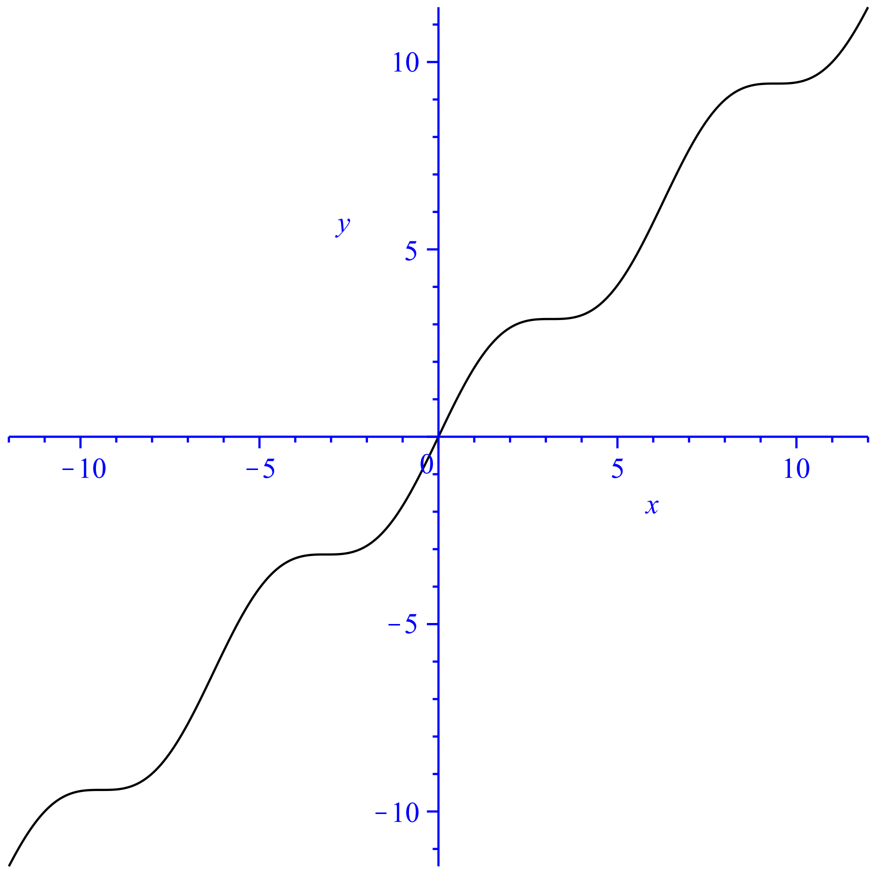

Grafico di $f(x) = x + \sin(x)$

Esercizio 6.b. Fare un esempio di una funzione f continua in $[0,2]$ tale che $f(0) = f(2)$, ma non esiste nessun $x \in (0,2)$ tale che $f'(x) = 0$.

La funzione

$$f(x) = |x-1|$$

ha le proprietà richieste. f è continua in $[0,2]$, $f(0) = f(2) = 1$ ed è derivabile in $[0,2] \setminus \{1\}$ con derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 1, \\ -1 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Tale derivata non si annulla mai.

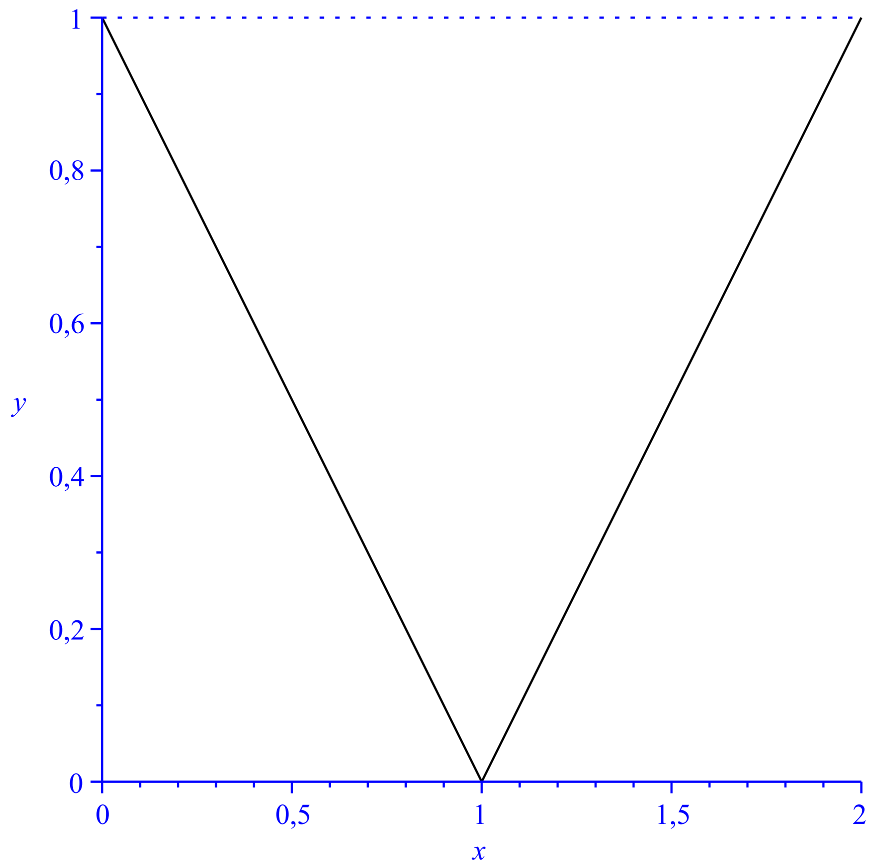

Grafico di $f(x) = |x-1|$

Esercizio 6.c. Fare un esempio di una funzione derivabile in $\mathbb{R}$ tale che $f(\mathbb{R}) = (-1, 1]$.

La funzione

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1} - 1$$

ha le proprietà richieste. f è una funzione pari, derivabile in $\mathbb{R}$ con derivata

$$f(x) = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Quindi è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$, $x = 0$ è un punto di massimo assoluto dove assume il valore $f(0) = 1$ ed è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$. Dato che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$$

si ha che -1 è l'estremo inferiore dell'immagine $f(\mathbb{R})$ ma non è un minimo. Quindi, per il teorema dei valori intermendi f assume tutti i valori in $(-1, 1]$, ossia $f(\mathbb{R}) = (-1, 1]$.

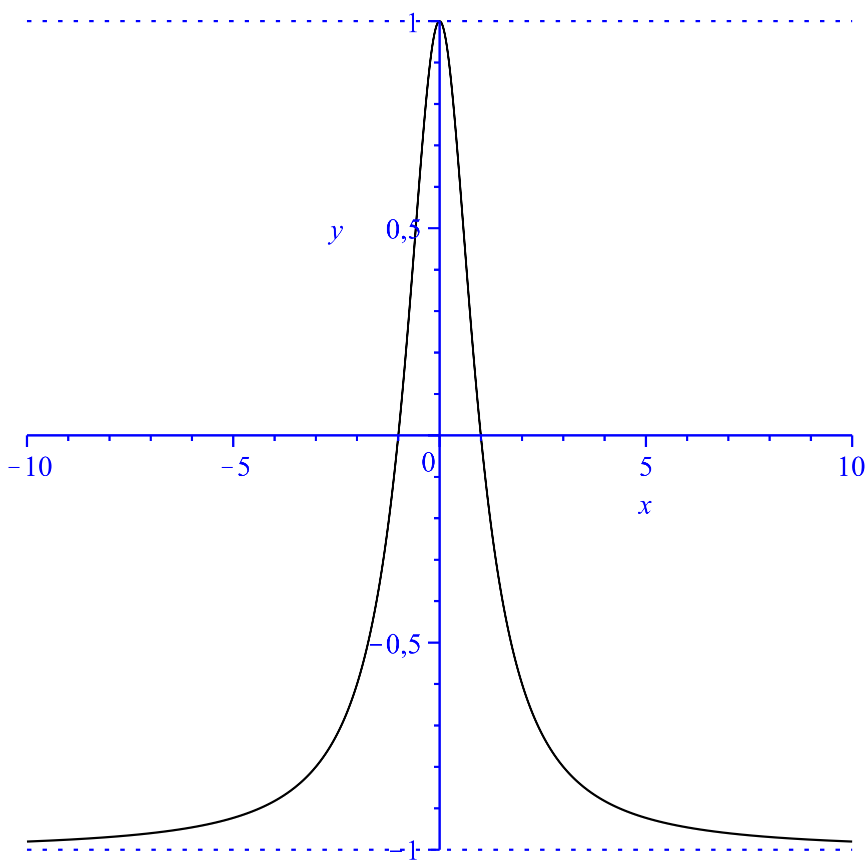

Grafico di $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1} - 1$