Analisi Matematica 1
Foglio di esercizi n. 4
SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{4^{n\log(n)}}.$$

Riscrivo la successione come
$$\frac{n^n}{4^{n\ln(n)}} = \frac{4^{n\log_4(n)}}{4^{n\ln(n)}} = 4^{n\log_4(n)-n\ln(n)}.$$

Così per $n\to\infty$,
$$n\log_4(n) - n\ln(n) = n\ln(n)\underbrace{\left(\frac{1}{\ln(4)}-1\right)}_{<0} \to -\infty$$

e quindi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{4^{n\ln(n)}} = 0.$$

Esercizio 1.b. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto:
$$\begin{aligned}\frac{(2(n+1))!}{(n+1)^{2n+2}}\cdot\frac{n^{2n}}{(2n)!} &= \frac{(2n+2)(2n+1)\cdot n^{2n}}{(n+1)^2\cdot(n+1)^{2n}}\\ &= \frac{2(2n+1)}{n+1}\cdot\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-2} \to 4e^{-2} < 1.\end{aligned}$$

Possiamo così concludere che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}} = 0.$$

Osservazione: ancora con il criterio del rapporto si ha che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3n)!}{n^{2n}} = +\infty,$$

quindi il valore del limite di $\frac{(An)!}{n^{Bn}}$ dipende dai numeri interi positivi A e B e non solo dal fatto che si tratta di un rapporto tra un fattoriale e una potenza di n^n.

Esercizio 1.c. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} n(6^{1/n} - 3^{1/n}).$$

Ricordando che per $a > 0$,
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a),$$
per $n \to \infty$,
$$n(6^{1/n} - 3^{1/n}) = \underbrace{3^{1/n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{2^{1/n} - 1}{1/n}}_{\to \ln(2)} \to \ln(2).$$

Esercizio 1.d. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n\log(n+3)}}{e^{n\log(n+1)}}.$$

Abbiamo che
$$\frac{e^{n\log(n+3)}}{e^{n\log(n+1)}} = \frac{(n+3)^n}{(n+1)^n} = \frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{e^3}{e} = e^2.$$

Esercizio 1.e. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{\frac{n-1}{n+4}} - 1\right).$$

Per $n \to \infty$,
$$n\left(\sqrt{\frac{n-1}{n+4}} - 1\right) = \frac{5n}{n+4} \cdot \frac{\left(1+\frac{5}{n+4}\right)^{1/2} - 1}{\frac{5}{n+4}} \to \frac{5}{2}.$$

Esercizio 1.f. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n - \sqrt{n}}\right).$$

Per $n \to \infty$,
$$\sqrt{n} - \sqrt{n-\sqrt{n}} = \sqrt{n}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}\right) = \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{1/2} - 1}{-1/\sqrt{n}} \to \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2.a. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\arctan(2x^3) - x^3}{x^2(\cos(3\sqrt{x}) - 1)}.$$

Per $x \to 0$
$$\frac{2\arctan(2x^3) - x^3}{x^2(\cos(3\sqrt{x}) - 1)} = \frac{4\,\frac{\arctan(2x^3)}{2x^3} - 1}{-9\,\frac{1-\cos(3\sqrt{x})}{9x}} \to \frac{4-1}{-9\cdot\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}.$$

Esercizio 2.b. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{8 + \sin(2/n)} - 2\right).$$

Per $n \to \infty$,
$$n\left(\sqrt[3]{8+\sin(2/n)} - 2\right) = \frac{2}{4}\cdot\underbrace{\frac{\left(1 + \frac{\sin(2/n)}{8}\right)^{1/3} - 1}{\frac{\sin(2/n)}{8}}}_{\to 1/3}\cdot\underbrace{\frac{\sin(2/n)}{2/n}}_{\to 1} \to \frac{1}{6}.$$

Esercizio 2.c. Calcolare
$$\lim_{x\to 2} \frac{\log(2) - \log(x)}{\sqrt{2} - \sqrt{x}}.$$

Per $x \to 2$,
$$\frac{\log(2/x)}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} = \underbrace{\frac{\log(1 + (2/x - 1))}{2/x - 1}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{2/x - 1}{2 - x}}_{\to 1/2}\cdot\underbrace{(\sqrt{2}+\sqrt{x})}_{\to 2\sqrt{2}} \to \sqrt{2}.$$

Esercizio 2.d. Calcolare
$$\lim_{x\to 2} \frac{\cos(\pi/x)}{\sqrt{2x} - 2}.$$

Abbiamo che
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{\cos(\pi/x)}{\sqrt{2x}-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{\cos(\pi/x)}{2(x-2)}\cdot(\sqrt{2x}+2) = 2\lim_{x\to 2}\frac{\cos(\pi/x)}{x-2}\\ &= 2\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{\frac{4t}{\pi-2t}} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}\cdot(\pi - 2t) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

dove $t = \pi/2 - \pi/x$.

Esercizio 2.e. Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{-1/x}+\sin(x)\right).$$

Sia $f(x)=x(e^{-1/x}+\sin(x))$ allora
$$\lim_{n\to\infty} f(2\pi n)=\lim_{n\to\infty} 2\pi n(e^{-1/(2\pi n)}+0)=+\infty.$$

Quindi se il limite di $f(x)$ per $x\to+\infty$ esiste, deve essere $+\infty$.
D'altra parte $2\pi n+3\pi/2\to+\infty$, ma
$$f(2\pi n+3\pi/2)=(2\pi n+3\pi/2)(\underbrace{e^{-1/(2\pi n+3\pi/2)}}_{<1}-1)<0$$
e quindi lungo tale successione la funzione non può divergere a $+\infty$.
Possiamo così concludere che il limite richiesto non esiste.

Esercizio 2.f. Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^2+1)}{x^{1-\frac{1}{x}}-x}.$$

Abbiamo che per $x\to+\infty$,
$$\begin{aligned}\frac{\ln(x^2+1)}{x^{1-\frac{1}{x}}-x}&=\frac{\ln(x^2(1+1/x^2))}{x(e^{-\ln(x)/x}-1)}=\frac{2\ln(x)+\ln(1+1/x^2)}{x(e^{-\ln(x)/x}-1)}\\&=\underbrace{\frac{2\ln(x)+\ln(1+1/x^2)}{\ln(x)}}_{\to 2}\cdot\underbrace{\frac{\ln(x)/x}{e^{-\ln(x)/x}-1}}_{\to -1}\to -2.\end{aligned}$$

Esercizio 3.a. Determinare la derivata di

$$f(x) = \cos(\pi/x)(3 + \sqrt{x}).$$

La derivata della funzione è

$$f'(x) = -\sin(\pi/x)\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)(3 + \sqrt{x}) + \cos(\pi/x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Esercizio 3.b. Determinare la derivata di

$$f(x) = x\log(1 + x^2)\tan(2x).$$

La derivata della funzione è

$$f'(x) = \log(1 + x^2)\tan(2x) + x\frac{2x}{1 + x^2}\tan(2x) + x\log(1 + x^2)\frac{2}{\cos^2(2x)}.$$

Esercizio 3.c. Determinare la derivata di

$$f(x) = \frac{x\sin(x)}{1 + \cos(x)}.$$

La derivata della funzione è

$$f'(x) = \frac{(\sin(x) + x\cos(x))(1 + \cos(x)) + x\sin^2(x)}{(1 + \cos(x))^2}.$$

Esercizio 2.d. Determinare la derivata di

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}.$$

La derivata della funzione è

$$f'(x) = \frac{\frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \left(-\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\arccos(x))^2}.$$

Esercizio 4.a. Data la funzione
$$f(x) = x + \sin(x)$$
determinare f' e studiarne il segno.

Per $x \in D = \mathbb{R}$ si ha che
$$f'(x) = 1 + \cos(x).$$
Abbiamo che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $\cos(x) \geq -1$. Quindi
$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ = 0 & \text{se } x \in \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \\ < 0 & \text{mai.} \end{cases}$$

Esercizio 4.b. Data la funzione
$$f(x) = x^{1/x}$$
determinare f' e studiarne il segno.

Per $x \in D = (0, +\infty)$ si ha che
$$f'(x) = \frac{x^{1/x}(1 - \log(x))}{x^2}.$$
Così, per $x > 0$,
$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \log(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e.$$
Quindi
$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (0, e), \\ = 0 & \text{se } x = e, \\ < 0 & \text{se } x \in (e, +\infty). \end{cases}$$

Esercizio 4.c. Data la funzione
$$f(x) = \frac{1 - |2x + 1|}{x^2 + 1}$$
determinare f' e studiarne il segno.

Per $x \in D = \mathbb{R}$ si ha che
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} & \text{se } x > -1/2, \\ -\dfrac{2(x^2 + 2x - 1)}{(x^2 + 1)^2} & \text{se } x < -1/2. \end{cases}$$

Nel punto $x = -\frac{1}{2}$ la funzione non è derivabile (la derivata destra è diversa dalla derivata sinistra). Studiando il segno di f' troviamo che

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (-1-\sqrt{2}, -1/2) \cup (1, +\infty), \\ = 0 & \text{se } x \in \{-1-\sqrt{2}, 1\}, \\ < 0 & \text{se } x \in (-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1/2, 1). \end{cases}$$

Esercizio 4.d. Data la funzione

$$f(x) = e^{-x^2}(x^4 - 3x^2 + 1)$$

determinare f' e studiarne il segno.

Per $x \in D = \mathbb{R}$ si ha che

$$f'(x) = -2e^{-x^2} x(x^2-1)(x^2-4).$$

Così,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2-1)(x^2-4) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [-1, 0] \cup [1, 2].$$

Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, 2), \\ = 0 & \text{se } x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \\ < 0 & \text{se } x \in (-2, -1) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty). \end{cases}$$

Esercizio 4.e. Data la funzione

$$f(x) = x \log |x|$$

determinare f' e studiarne il segno.

Per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si ha che

$$f'(x) = \log|x| + 1.$$

Così,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1/e] \cup [1/e, +\infty).$$

Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (-\infty, -1/e) \cup (1/e, +\infty), \\ = 0 & \text{se } x \in \{-1/e, 1/e\}, \\ < 0 & \text{se } x \in (-1/e, 0) \cup (0, 1/e). \end{cases}$$

Esercizio 4.f. Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x} - 4\log(\sqrt{x} + 1)$$

determinare f' e studiarne il segno.

Il dominio è $D = [0, +\infty)$. Per $x \in D \setminus \{0\} = (0, +\infty)$ si ha che

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}.$$

f non è derivabile in $x = 0$. Così, per $x > 0$,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 3 \Leftrightarrow x \in [9, +\infty).$$

Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (9, +\infty), \\ = 0 & \text{se } x = 9, \\ < 0 & \text{se } x \in (0, 9). \end{cases}$$

Esercizio 5.a. Fare un esempio di una funzione continua in $(0,1)$, non limitata e con un punto di minimo assoluto.

La funzione
$$f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$$
ha le proprietà richieste. f è continua in $(0,1)$ ed è non limitata perché
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty.$$
Inoltre
$$f'(x) = \frac{2x-1}{(x(1-x))^2}$$
e quindi f è crescente in $[1/2, 1)$ ed è decrescente in $(0, 1/2]$. Ne segue che $x = 1/2$ è un punto di minimo assoluto.

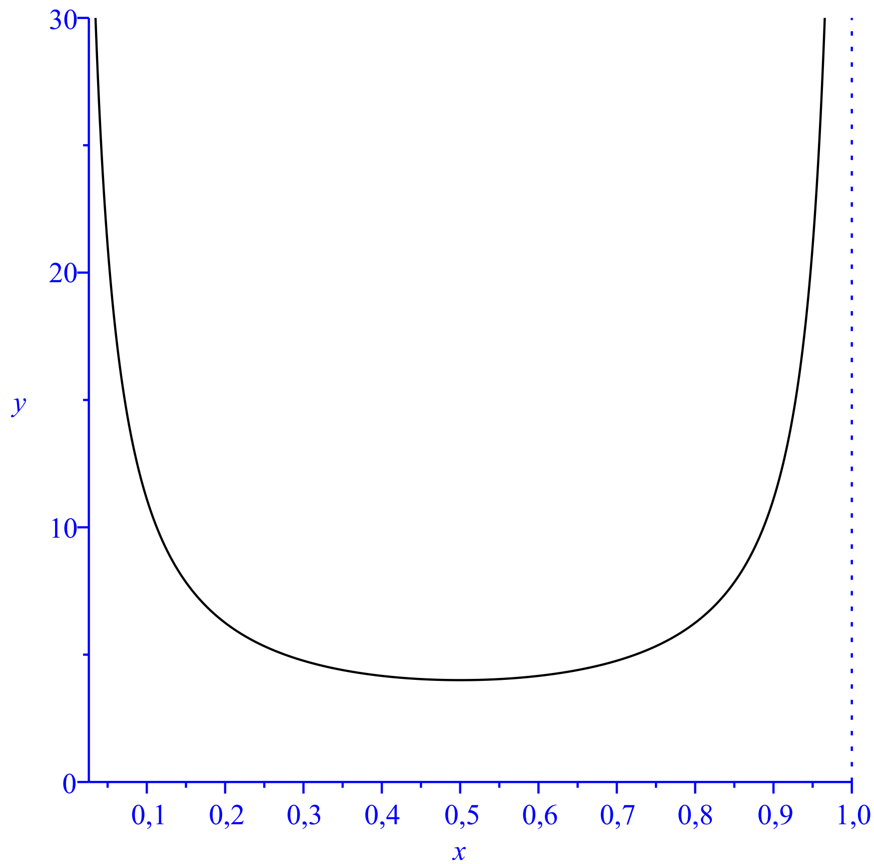

Grafico di $f(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$

Esercizio 5.b. Fare un esempio di una funzione continua in $\mathbb{R}$, limitata tra 0 e 2, senza punti di massimo assoluto e senza punti di minimo assoluto.

La funzione

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\arctan(x) + 1$$

ha le proprietà richieste. f è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ con la derivata strettamente positiva:

$$f'(x) = \frac{2/\pi}{1+x^2} > 0.$$

Quindi f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1+1 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1+1 = 2$$

implica che $f(\mathbb{R}) = (0, 2)$.

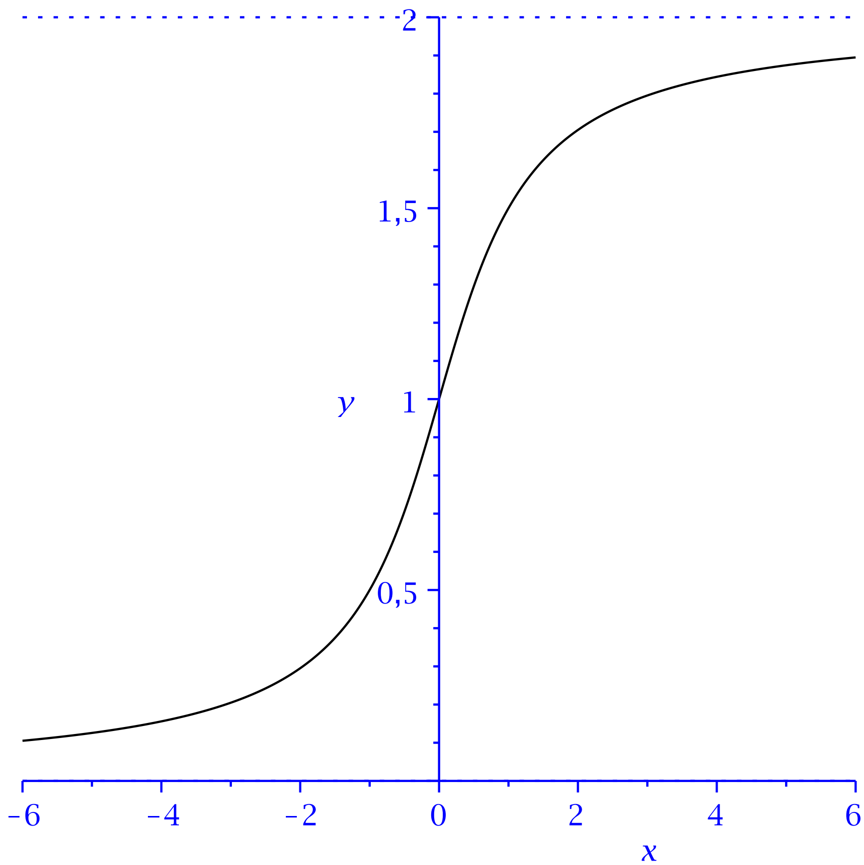

Grafico di $f(x) = \frac{2}{\pi}\arctan(x) + 1$