Analisi Matematica 1

Foglio di esercizi n. 2

SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Risolvere
$$||x-3|-3x-1| \geq 2x+1.$$

Risolviamo prima la disequazione $|x-3| \geq 3x+1$ ossia

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x-3 \geq 3x+1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 3 \\ 3-x \geq 3x+1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x \in \emptyset \cup (-\infty, 1/2] = (-\infty, 1/2].$$

Quindi la disequazione data è equivalente a

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ |x-3|-3x-1 \geq 2x+1 \end{cases} \vee \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 3x+1-|x-3| \geq 2x+1 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ |x-3| \geq 5x+2 \end{cases} \vee \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ |x-3| \leq x \end{cases}$$

Il primo sistema vale per $x \leq \frac{1}{6}$ mentre il secondo vale per $x \geq \frac{3}{2}$. Quindi l'insieme delle soluzioni è

$$\left(-\infty, \frac{1}{6}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

Esercizio 1.b. Risolvere
$$4^{x+1} \cdot 3^{x-1} < 48 \cdot 2^x.$$

Abbiamo che

$$4 \cdot 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 3^{-1} < 48 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^{2x-x} \cdot 3^x < \frac{48 \cdot 3}{4} = 36 = 6^2 \Leftrightarrow 6^x < 6^2 \Leftrightarrow x < 2$$

e dunque l'insieme delle soluzioni è $(-\infty, 2)$.

Esercizio 1.c. Risolvere
$$\frac{4}{8^x-2} + \frac{5}{8^x+1} < 3.$$

Poniamo $8^x = y$, da cui

$$\frac{4y+4+5y-10-3(y^2-y-2)}{(y+1)(y-2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-3y^2+12y}{(y+1)(y-2)} < 0$$

che è risolta per

$$y < -1 \quad \vee \quad 0 < y < 2 \quad \vee \quad y > 4.$$

Considerando che $y = 2^{3x}$ è sempre positivo, si ha

$$2^{3x} < 2 \quad \vee \quad 2^{3x} > 4 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3} \quad \vee \quad x > \frac{2}{3}$$

e dunque l'insieme delle soluzioni è

$$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right).$$

Esercizio 1.d. Risolvere

$$16^{\sin^2(x)} + 16^{\cos^2(x)} \leq 17.$$

Ponendo $16^{\cos^2(x)} = y$, si ha che

$$16y^{-1} + y \leq 17 \Leftrightarrow \frac{(y-1)(y-16)}{y} \leq 0 \Leftrightarrow y < 0 \quad \vee \quad 1 \leq y \leq 16.$$

Ora $y = 16^{\cos^2(x)} < 0$ è sempre falsa, mentre

$$1 \leq 16^{\cos^2(x)} \leq 16 \Leftrightarrow 16^0 \leq 16^{\cos^2(x)} \leq 16^1 \Leftrightarrow 0 \leq \cos^2(x) \leq 1$$

è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$. L'insieme delle soluzioni è $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.a. Determinare il dominio D della funzione

$$f(x) = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\ln(8-|2x+1|)}.$$

Le condizioni di esistenza per il dominio sono

$$\begin{cases} 1+\frac{1}{x} > 0 \\ \ln(8-|2x+1|) \neq 0 \\ 8-|2x+1| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \quad \vee \quad x > 0 \\ |2x-1| \neq 7 \\ -8 < 2x+1 < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \quad \vee \quad x > 0 \\ x \neq 3 \quad \wedge \quad x \neq -4 \\ \frac{9}{2} < x < \frac{7}{2} \end{cases}$$

Da cui, alla fine otteniamo

$$D = \left(-\frac{9}{2}, -4\right) \cup (-4,-1) \cup (0,3) \cup \left(3, \frac{7}{2}\right).$$

Esercizio 2.b. Determinare il dominio D della funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{|x-1|}-2}\right).$$

Dobbiamo determinare le soluzioni di

$$\begin{cases} \left|\frac{1}{\sqrt{|x-1|}-2}\right| \leq 1 \\ \sqrt{|x-1|}-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq |\sqrt{|x-1|}-2| \Leftrightarrow 3 \leq \sqrt{|x-1|} \quad \vee \quad \sqrt{|x-1|} \leq 1$$

La prima disequazione ha soluzioni $(-\infty,-8] \cup [10,\infty)$, mentre la seconda ha soluzioni $[0,2]$. Unendo otteniamo l'insieme completo delle soluzioni e possiamo concludere che il dominio è

$$D = (-\infty,-8] \cup [0,2] \cup [10,\infty).$$

Esercizio 3.a. Dimostrare per induzione che

$$\forall n \geq 6, \qquad n2^n \leq n!$$

Passo base. Verifichiamo $P(6)$:

$$6 \cdot 2^6 = 384 \leq 6! = 720.$$

Passo induttivo. Dimostriamo che che per $n \geq 6$ se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$:

$$(n+1)2^{n+1} = (n+1) \cdot 2 \cdot 2^n \leq (n+1) \cdot n \cdot 2^n \leq (n+1)n! = (n+1)!$$

Esercizio 3.b. Dimostrare per induzione che

$$\forall n \geq 5, \qquad \binom{2n}{n} < 4^{n-1}.$$

Passo base. Verifichiamo $P(5)$:

$$252 = \binom{2 \cdot 5}{5} < 4^{5-1} = 256.$$

Passo induttivo. Dimostriamo che per $n \geq 5$ se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$:

$$\begin{aligned}\binom{2(n+1)}{n+1} &= \frac{2(n+1)}{n+1}\binom{2n+1}{n} = 2\binom{2n+1}{n+1} \\ &= \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n} < \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot 4^{n-1}\end{aligned}$$

dove all'ultimo passaggio abbiamo applicato l'ipotesi induttiva. Basta allora verificare che

$$\frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot 4^{n-1} \leq 4^n$$

ossia

$$2n+1 \leq 2(n+1) = 2n+2$$

che è vera.

Esercizio 3.c. Dimostrare per induzione che

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Passo base. Verifichiamo $P(1)$:

$$1 = \sum_{k=0}^{1} k^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1.$$

Passo induttivo. Dimostriamo che per $n \geq 1$ se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3))}{6}.\end{aligned}$$

Esercizio 3.d. Dimostrare per induzione che

$$\forall n \geq 1 \text{ e } \forall x \neq 1, \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

Passo base. Verifichiamo $P(1)$:

$$x^0 + x^1 = \sum_{k=0}^{1} x^k = \frac{x^2-1}{x-1} = 1 + x.$$

Passo induttivo. Dimostriamo che per $n \geq 1$ se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^{n+1} = \frac{x^{n+2}-1}{x-1}.$$

Esercizio 3.e. Dimostrare per induzione che

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ e } \forall x \in (-1, 0), \qquad (1+x)^n < 1 + nx + n^2x^2.$$

Passo base. Verifichiamo $P(1)$:

$$1 + x < 1 + x + x^2 \Leftrightarrow x^2 > 0$$

dove $x^2 > 0$ vale perché $x \neq 0$.
Passo induttivo. Dimostriamo che che per $n \geq 1$ se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$: dato che $(1+x) > 0$,

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) < (1+nx+n^2x^2)(1+x) = \\ &= 1 + (n+1)x + (n+n^2+n^2x)x^2 \leq 1 + (n+1)x + (n+1)^2x^2\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza vale se

$$(n + n^2 + n^2x) \leq (n+1)^2 \Leftrightarrow x \leq \frac{n+1}{n^2}$$

che è vera dato che $x < 0 < \frac{n+1}{n^2}$.

Esercizio 4.a. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \{\sin(1/x)\ :\ x \in (0, +\infty)\}$$

specificando se sono anche rispettivamente massimo e minimo.

I valori della funzione seno appartengono all'intervallo $[-1, 1]$, quindi se esiste $x_1 \in (0, +\infty)$ tale che $\sin(1/x_1) = -1$ e esiste $x_2 \in (0, +\infty)$ tale che $\sin(1/x) = 1$ possiamo concludere che

$$\inf(A) = \min(A) = -1 \qquad \text{e} \qquad \sup(A) = \max(A) = 1.$$

Ad esempio possiamo prendere $x_1 = \frac{2}{3\pi} \in (0, +\infty)$ e $x_2 = \frac{2}{\pi} \in (0, +\infty)$.

Esercizio 4.b. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \{x \in (0, +\infty) : \sin(1/x) = 0\}$$

specificando se sono anche rispettivamente massimo e minimo.

Le soluzioni $x > 0$ dell'equazione $\sin(1/x) = 0$ sono

$$\frac{1}{x} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{k\pi}$$

con $k \in \mathbb{N}^+$ e quindi

$$A = \left\{ \frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

Dato che $\frac{1}{k\pi} \leq \frac{1}{\pi}$ e $\frac{1}{\pi} \in A$ abbiamo che $\sup(A) = \max(A) = \frac{1}{\pi}$. Mentre

$$\forall k \in \mathbb{N}^+, \quad 0 < \frac{1}{k\pi} \quad \wedge \quad \forall \epsilon > 0, \quad \frac{1}{k\pi} < \epsilon \text{ per } k \in \mathbb{N}^+ \text{ tale che } k > \tfrac{1}{\epsilon\pi}$$

implica che che A non ha minimo e $\inf(A) = 0$.

Esercizio 4.c. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ n - \sqrt{n^2 - n}\ :\ n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

specificando se sono anche rispettivamente massimo e minimo.

Dato che

$$a_n = n - \sqrt{n^2 - n} = \frac{n^2 - (n^2 - n)}{n + \sqrt{n^2 - n}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}},$$

si verifica facilmente che $\{a_n\}_n$ è una successione decrescente ossia $a_{n+1} \leq a_n$ e quindi

$$\sup(A) = \max(A) = a_1 = 1.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$,

$$a_n = \frac{1}{1 + \underbrace{\sqrt{1 - \frac{1}{n}}}_{<1}} > \frac{1}{2}.$$

Inoltre per $\epsilon > 0$, scegliendo $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $n > \frac{(1+2\epsilon)^2}{8\epsilon}$, si ha $\frac{1}{2} + \epsilon > a_n$ e quindi $\inf(A) = \frac{1}{2}$ e A non ha minimo.

Esercizio 4.d. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ n + \frac{10}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

specificando se sono anche rispettivamente massimo e minimo.

Osserviamo che per $n \in \mathbb{N}^+$, $a_n = n + \frac{10}{n} > n$ e quindi l'insieme non è limitato superiormente. Quindi $\sup(A) = +\infty$ e A non ha massimo.
Inoltre per $n = 1, 2, 3$ otteniamo i numeri 11, 7, 19/3 e per $n \geq 4$, si verifica che

$$n + \frac{10}{n} > 4 > \frac{19}{3}.$$

Così

$$\inf(A) = \min(A) = \min\{11, 7, 19/3\} = \frac{19}{3}.$$

Esercizio 4.e. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ \sqrt{3}|n^2 - 20| + 20\tan(n\pi/3) \ : \ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

specificando se sono anche rispettivamente massimo e minimo.

Il termine $\sqrt{3}|n^2 - 20|$ non è limitato superiormente, mentre $20\tan(n\pi/3)$ è limitato perché per ogni $n \in \mathbb{Z}$,

$$\tan(n\pi/3) \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}.$$

Quindi $\sup(A) = +\infty$ e A non ha massimo.
Osserviamo che se $|n| \geq 7$ allora

$$\sqrt{3}|n^2 - 20| + 20\tan(n\pi/3) \geq \sqrt{3}(49 - 20) - 20\sqrt{3} = 9\sqrt{3} > 0$$

mentre calcolando esplicitamente il termine per $n \in [-6, 6] \cap \mathbb{Z}$ si vede che il minimo viene raggiunto per $n = -4$ e vale $-16\sqrt{3} < 0$. Così

$$\inf(A) = \min(A) = -16\sqrt{3}.$$

Esercizio 1.a. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{10^n \cdot n! - 5^n \cdot n^n}{n^5 + n^{2n}}.$$

Abbiamo che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{10^n n! - 5^n n^n}{n^5 + n^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\frac{10^n}{n^n}}^{\to 0} \cdot \overbrace{\frac{n!}{n^n}}^{\to 0} - \overbrace{\frac{5^n}{n^n}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{n^5}{n^{2n}}}_{\to 0} + 1} = 0.$$

Esercizio 1.b. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n - 1)(2 - \cos(n!))}{\log(3^n - 1)}.$$

Dato che $2 - \cos(n!) \geq 1$,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n - 1)(2 - \cos(n!))}{\ln(3^n - 1)} \geq \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{2^n}{n}}_{\to +\infty} \cdot \frac{\left(1 - \overbrace{\frac{1}{2^n}}^{\to 0}\right)}{\ln(3) + \underbrace{\frac{\log(1 - 1/3^n)}{n}}_{\to 0}} = +\infty$$

e per confronto il limite dato vale $+\infty$.

Esercizio 1.c. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(5 - n)^5 + n^5}{(4 - n)^4 + n^4}.$$

Sviluppando le potenze al numeratore e al denominatore otteniamo che per $n \to \infty$,
$$\frac{(5 - n)^5 + n^5}{(4 - n)^4 + n^4} = \frac{-n^5 + 25n^4 + p(n) + n^5}{n^4 + q(n) + n^4} = \frac{25 + \overbrace{\frac{p(n)}{n^4}}^{\to 0}}{2 + \underbrace{\frac{q(n)}{n^4}}_{\to 0}} \to \frac{25}{2}$$

dove $p(n)$ e $q(n)$ sono due polinomi di terzo grado.

Esercizio 1.d. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{4^n - n}{2^n + n} - \frac{4^n + n}{2^n - n}\right).$$

Abbiamo che
$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left(\frac{4^n - n}{2^n + n} - \frac{4^n + n}{2^n - n}\right) &= \frac{(2^{2n} - n)(2^n - n) - (2^{2n} + n)(2^n + n)}{n(2^{2n} - n^2)} \\ &= -\frac{2^{2n+1}n}{n(2^{2n} - n^2)}.\end{aligned}$$

Quindi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{4^n - n}{2^n + n} - \frac{4^n + n}{2^n - n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{1 - n^2/2^{2n}} = -2.$$

Esercizio 1.e. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n n}{n^2 + 1}.$$

La successione $a_n = \frac{(-2)^n n}{n^2+1}$ non ha limite. Infatti considerando le sottosuccessione generata dai numeri pari e quella generata dai numeri dispari, otteniamo limiti diversi
$$a_{2n} = \frac{4^n(2n)}{(2n)^2 + 1} \to +\infty \quad \text{e} \quad a_{2n+1} = \frac{-2 \cdot 4^n(2n+1)}{(2n+1)^2 + 1} \to -\infty.$$

Esercizio 1.f. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^2 + 3)}{\log(n^3 + 2)}.$$

Per $n \to \infty$,
$$\frac{\ln(n^2 + 3)}{\ln(n^3 + 2)} = \frac{\ln(n^2(1 + 3/n^2))}{\ln(n^3(1 + 2/n^3))} = \frac{2\ln(n) + \ln(1 + 3/n^2))}{3\ln(n) + \ln(1 + 2/n^3)} = \frac{2 + \frac{\ln(1+3/n^2)}{\ln(n)}}{3 + \frac{\ln(1+2/n^3)}{\ln(n)}} \to \frac{2}{3}.$$