

Analisi Matematica 1

Foglio di esercizi n. 2

1. Risolvere le seguenti disuguaglianze:

a. $||x - 3| - 3x - 1| \geq 2x + 1$ b. $4^{x+1} \cdot 3^{x-1} < 48 \cdot 2^x$
c. $\frac{4}{8^x - 2} + \frac{5}{8^x + 1} < 3$ d. $16^{\sin^2(x)} + 16^{\cos^2(x)} \leq 17$

2. Determinare il dominio D delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = \frac{(1 + \frac{1}{x})^x}{\ln(8 - |2x + 1|)}$ b. $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{|x - 1|} - 2}\right)$

3. Utilizzare il principio di induzione per dimostrare le seguenti affermazioni:

a. $\forall n \geq 6, n2^n \leq n!$ b. $\forall n \geq 5, \binom{2n}{n} < 4^{n-1}$
c. $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ d. $\forall n \geq 1$ e $\forall x \neq 1, \sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$
e. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ e $\forall x \in (-1, 0), (1 + x)^n < 1 + nx + n^2x^2$

4. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti insiemi specificando se sono anche rispettivamente massimo e minimo:

a. $\{\sin(1/x) : x \in (0, +\infty)\}$ b. $\{x \in (0, +\infty) : \sin(1/x) = 0\}$
c. $\{n - \sqrt{n^2 - n} : n \in \mathbb{N}^+\}$ d. $\left\{n + \frac{10}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$
e. $\left\{\sqrt{3}|n^2 - 20| + 20 \tan(n\pi/3) : n \in \mathbb{Z}\right\}$

5. Calcolare i seguenti limiti:

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n \cdot n! - 5^n \cdot n^n}{n^5 + n^{2n}}$ b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n - 1)(2 - \cos(n!))}{\log(3^n - 1)}$
c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5 - n)^5 + n^5}{(4 - n)^4 + n^4}$ d. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{4^n - n}{2^n + n} - \frac{4^n + n}{2^n - n} \right)$
e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n n}{n^2 + 1}$ f. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n^2 + 3)}{\log(n^3 + 2)}$