

Analisi Matematica - CdL Informatica
Svolgimento della prova scritta del 17/9/2024

Esercizio 1. Sia $f(x) = \arcsin(\sqrt{|x^2 - 1|})$.

a) Determinare il dominio, la derivata prima, i punti di non derivabilità e gli intervalli di monotonia.

b) Trovare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = c$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

a) Le condizioni da imporre per determinare il dominio di f sono

$$\begin{cases} |x^2 - 1| \geq 0 \\ -1 \leq \sqrt{|x^2 - 1|} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow |x^2 - 1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x^2 - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 2$$

e quindi il dominio è $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

La funzione f è pari. Inoltre, per $x \geq 0$,

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin(\sqrt{x^2 - 1}) & \text{se } x \in [1, \sqrt{2}], \\ \arcsin(\sqrt{1 - x^2}) & \text{se } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Quindi, per $x \in (1, \sqrt{2})$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x^2 - 1})^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}\sqrt{x^2 - 1}}$$

mentre per $x \in (0, 1)$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{1 - x^2})^2}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Quindi per la parità, i punti di non derivabilità sono: $-\sqrt{2}$, -1 , 0 , 1 , $\sqrt{2}$. Si noti che $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = \mp 1$. Inoltre f è strettamente crescente in $[-1, 0]$ e in $[1, \sqrt{2}]$, ed è strettamente decrescente in $[-\sqrt{2}, -1]$ e in $[0, 1]$. Il valore massimo di f è $f(\pm\sqrt{2}) = f(1) = \pi/2$ e il valore minimo è $f(\pm 1) = 0$.

b) Dato che f è continua in D , dallo studio della monotonia si deduce che, per il teorema dei valori intermedi, l'equazione $f(x) = c$ ha

$$\begin{cases} 3 \text{ soluzione se } c = \pi/2 \\ 4 \text{ soluzione se } 0 < c < \pi/2 \\ 2 \text{ soluzione se } c = 0 \\ 0 \text{ soluzione altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $f(x) = \frac{\sqrt{4x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}}{2x + 1}$.

a) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine $n = 2$ di f in $x_0 = 0$.

b) Qual è l'asintoto di f per $x \rightarrow +\infty$?

a) Per $x \rightarrow 0$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\sqrt{4x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} &= \sqrt{1 + (2x + 2x^2 + o(x^2))} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(2x + 2x^2 + o(x^2)) - \frac{1}{8}(2x + 2x^2 + o(x^2))^2 + o(x^2) \\ &= 1 + x + (1 - 1/2)x^2 + o(x^2) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).\end{aligned}$$

Inoltre

$$\frac{1}{2x + 1} = (1 + 2x)^{-1} = 1 - 2x + (2x)^2 + o(x^2) = 1 - 2x + 4x^2 + o(x^2).$$

Quindi

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \cdot (1 - 2x + 4x^2 + o(x^2)) \\ &= 1 + (1 - 2)x + \left(\frac{1}{2} - 2 + 4\right)x^2 + o(x^2) = 1 - x + \frac{5x^2}{2} + o(x^2).\end{aligned}$$

da cui $T_2(x) = 1 - x + \frac{5x^2}{2}$.

b) Per $x \rightarrow +\infty$, $t = 1/x \rightarrow 0$ e

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{2x^2 \sqrt{1 - \frac{t}{2} + o(t)}}{2x(1 + \frac{t}{2})} = x \cdot \left(1 - \frac{t}{4} + o(t)\right) \cdot \left(1 - \frac{t}{2} + o(t)\right) \\ &= x \left(1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)t + o(t)\right) = x - \frac{3}{4} + o(1).\end{aligned}$$

Quindi l'asintoto per $x \rightarrow +\infty$ è la retta $y = x - \frac{3}{4}$.

Esercizio 3. a) Dimostrare per induzione che per ogni intero $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n + 1}.$$

b) Calcolare il valore della somma della serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k^2 + 4^k - 1}{4^k(4k^2 - 1)}.$$

a) Indichiamo con $P(n)$ la proposizione da dimostrare Passo base. Verifichiamo $P(1)$:

$$\frac{1}{3} = \sum_{k=0}^1 \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}.$$

Passo induttivo. Dimostriamo che per $n \geq 1$ se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n + 1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2 - 1} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} + \frac{1}{4(n+1)^2 - 1} \\ &= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} \\ &= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}. \end{aligned}$$

b) La serie si scompone in una serie geometrica e nel limite della somma data in a):

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k^2 + 4^k - 1}{4^k(4k^2 - 1)} &= \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4^k} + \frac{1}{4k^2 - 1} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1/4^2}{1 - 1/4} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1+6-4}{12} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Sia $\int_{-1}^3 \frac{A + x - \sqrt{x+1}}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} dx$ con $A \in \mathbb{R}$.

a) Per quali valori di A l'integrale dato è convergente?

b) Calcolare l'integrale per $A = -1$.

a) Per la convergenza basta indagare il comportamento della funzione integranda nel punto 3^- .
Per $x \rightarrow 3^-$,

$$\frac{A + x - \sqrt{x+1}}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} \sim \frac{A + 3 - \sqrt{3+1}}{(x-3)(\sqrt{3+1}+2)} = \frac{(A+1)/4}{x-3}$$

Dato l'integrale di $1/(x-3)$ non è convergente in un intorno destro di 3, l'integrale dato converge solo se $(A+1)/4 = 0$ ossia per $A = -1$.

b) Poniamo $t = \sqrt{x+1}$, da cui $x = t^2 - 1$ e $dx = 2t dt$. Così

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 \frac{-1 + x - \sqrt{x+1}}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} dx &= \int_0^2 \frac{t^2 - t - 2}{(t^2 - 4)(t+2)} 2t dt = 2 \int_0^2 \frac{t^2 + t}{(t+2)^2} dt \\ &= 2 \int_2^4 \frac{s^2 - 3s + 2}{s^2} ds = 2 \int_2^4 \left(1 - \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2}\right) ds \\ &= 2 \left[s - 3 \log(s) - \frac{2}{s} \right]_2^4 = 2 \left(2 - 3 \log(4/2) + \frac{1}{2} \right) \\ &= 5 - 6 \log(2). \end{aligned}$$

dove è stata effettuata anche la sostituzione $s = t + 2$.