

Analisi Matematica - CdL Informatica
Svolgimento della prova scritta del 3/9/2024

Esercizio 1. Sia $f(x) = (2x - 3)e^{x^2}$.

- a) Determinare tutti i valori di k tali che l'equazione $f(x) = k$ ha esattamente due soluzioni.
- b) Dimostrare che la funzione f ha un unico punto di flesso e che tale punto appartiene all'intervallo $(0, 1)$.

a) La derivata prima di f è

$$f'(x) = 2e^{x^2} + (2x - 3)e^{x^2} 2x = 2e^{x^2}(2x^2 - 3x + 1) = 2e^{x^2}(2x - 1)(x - 1)$$

e quindi f è strettamente crescente in $(-\infty, 1/2]$ e in $[1, \infty)$, mentre è strettamente decrescente in $[1/2, 1]$. Dato che f è continua e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, dallo studio della monotonia si deduce che, per il teorema dei valori intermedi, l'equazione $f(x) = k$ ha

$$\begin{cases} 1 \text{ soluzione se } k < f(1) \text{ o } k > f(1/2) \\ 2 \text{ soluzioni se } k = f(1) \text{ oppure } k = f(1/2) \\ 3 \text{ soluzioni se } f(1) < k < f(1/2) \end{cases}$$

Quindi i valori cercati di k sono $f(1) = -e$ e $f(1/2) = -2e^{1/4}$.

b) La derivata seconda di f è

$$f''(x) = (2e^{x^2}(2x^2 - 3x + 1))' = 2e^{x^2} 2x(2x^2 - 3x + 1) + 2e^{x^2}(4x - 3) = 2e^{x^2}(4x^3 - 6x^2 + 6x - 3).$$

Il segno di $f''(x)$ è deciso dal segno del polinomio $p(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 3$. Tale polinomio p è strettamente crescente perché per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$p'(x) = 12x^2 - 12x + 6 = 6(2x^2 - 2x + 1) > 0$$

in quanto il coefficiente di x^2 è positivo e $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 < 0$. Inoltre $p(0) = -3 < 0$ e $p(1) = 1 > 0$ e per il teorema degli zeri e la stretta crescenza, esiste un unico $x_0 \in (0, 1)$ tale che $p(x_0) = 0$. Tale punto x_0 è proprio il punto di flesso di f cercato.

Esercizio 2. Sia $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{|\log(x)|^a(x^2 + 3x + 2)} dx$ con $a \in \mathbb{R}$.

a) Per quali valori di a l'integrale dato è convergente?

b) Calcolare l'integrale per $a = 0$.

a) Nell'intervallo $(0, +\infty)$, i punti da indagare sono tre: 0^+ , $1^\pm$ e $+\infty$.

Per $x \rightarrow 0^+$,

$$\frac{\sqrt{x}}{|\log(x)|^a(x^2 + 3x + 2)} \sim \frac{1/2}{x^{-1/2}|\log(x)|^a}.$$

Dato che $-1/2 < 1$, la convergenza è verificata per ogni a .

Per $x \rightarrow 1^\pm$, si ha che $t = x - 1 \rightarrow 0^\pm$ e

$$\frac{\sqrt{x}}{|\log(x)|^a(x^2 + 3x + 2)} \sim \frac{1/6}{|\log(1+t)|^a} \sim \frac{1/6}{|t|^a}.$$

Per la convergenza deve valere la condizione $a < 1$.

Per $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{\sqrt{x}}{|\log(x)|^a(x^2 + 3x + 2)} \sim \frac{1/2}{x^{3/2}(\log(x))^a}.$$

Dato che $3/2 > 1$, la convergenza è verificata per ogni a .

Così l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $a < 1$.

b) Per $a = 0$, poniamo $x = t^2$, così $dx = 2t dt$ e

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3x + 2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+2)(x+1)} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(t^2+2)(t^2+1)} dt \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+2} dt - 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= 4 \left[\frac{\arctan(t/\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \right]_0^{+\infty} - 2 \left[\arctan(t) \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{4(\pi/2)}{\sqrt{2}} - 2(\pi/2) = \pi(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Esercizio 3. a) Risolvere il problema di Cauchy per $x \in (1, +\infty)$,

$$\begin{cases} x \log(x) y'(x) = (2 \log(x))^2 - 2y(x) \\ y(e) = 3 \end{cases}$$

b) Determinare il valore minimo della soluzione $y(x)$ nell'intervallo $(1, +\infty)$.

a) Risistemando i termini abbiamo che per $x > 1$,

$$y'(x) + \frac{2}{x \log(x)} y(x) = \frac{4 \log(x)}{x}.$$

Quindi $a(x) = \frac{2}{x \log(x)}$,

$$A(x) = \int a(x) dx = 2 \int \frac{1}{x \log(x)} dx = 2 \log(\log(x)) = \log(\log^2(x))$$

e il fattore integrante è $\exp(A(x)) = \log^2(x)$.

Inoltre

$$\int \exp(A(x)) f(x) dx = \int \frac{4 \log^3(x)}{x} dx = \int 4 \log^3(x) d(\log(x)) = \log^4(x) + c.$$

Così la soluzione generale è

$$y(x) = \exp(-A(x)) \int \exp(A(x)) f(x) dx = \log^2(x) + \frac{c}{\log^2(x)}.$$

Imponendo la condizione $y(e) = 3$ si trova

$$3 = y(e) = 1 + c \implies c = 2$$

e la soluzione cercata è

$$y(x) = \log^2(x) + \frac{2}{\log^2(x)}.$$

b) La derivata prima di $y(x)$ è

$$y'(x) = \frac{2 \log(x)}{x} - \frac{4}{x \log^3(x)} = \frac{2(\log^4(x) - 2)}{x \log^3(x)}$$

Per $x > 1$ il segno di $y'(x)$ è determinato da $\log^4(x) - 2$ e si trova che in $(1, +\infty)$ c'è un unico punto di minimo (assoluto) ossia $x_0 = e^{\sqrt[4]{2}}$. Il valore minimo è dunque $y(x_0) = 2\sqrt{2}$.

Esercizio 4. Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$\operatorname{Im}(z^2 + 5z) = (iz)^2 + 4.$$

Ponendo $z = x + iy$ con x e y numeri reali e sostituendo nell'equazione si ha che

$$\operatorname{Im}(x^2 - y^2 + 2ixy + 5x + i5y) = -(x^2 - y^2 + 2ixy) + 4.$$

ossia

$$2xy + 5y = -x^2 + y^2 - 2ixy + 4.$$

Separando la parte reale e la parte immaginaria otteniamo

$$\begin{cases} 2xy + 5y = -x^2 + y^2 + 4 \\ -2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 5y + 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases}.$$

L'equazione $y^2 - 5y + 4 = 0$ ha soluzioni 1 e 4 mentre $x^2 = 4$ ha soluzioni $x = \pm 2$.
Quindi le soluzioni complesse dell'equazione data sono:

$$z_1 = i, \quad z_2 = 4i, \quad z_3 = 2, \quad z_4 = -2.$$