Analisi Matematica - CdL Informatica
Svolgimento della prova scritta del 9/7/2024

Esercizio 1. Sia $f(x) = \dfrac{1}{e^{1/x} - \cos(1/x)} + \dfrac{8}{\log(1+x) - \log(x)}$.

a) Determinare il dominio D della funzione f.

b) Calcolare l'asintoto di f per $x \to +\infty$.

a) Le condizioni da imporre per determinare il dominio di f sono

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ e^{1/x} - \cos(1/x) \neq 0 \\ 1+x > 0 \\ x > 0 \\ \log(1+x) - \log(x) \neq 0 \end{cases}$$

La condizione più forte è $x > 0$ e dunque il dominio è $D = (0, +\infty)$. Infatti per $x > 0$, $e^{1/x} > 1 \geq \cos(1/x)$ e $\log(1+x) > \log(x)$ (il logaritmo naturale è strettamente crescente).

b) Per $x \to +\infty$, si ha che $t = 1/x \to 0$ e

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{e^{1/x} - \cos(1/x)} + \frac{8}{\log(1+1/x)} = \frac{1}{e^t - \cos(t)} + \frac{8}{\log(1+t)} \\ &= \frac{1}{1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) - (1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2))} + \frac{8}{t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)} \\ &= \frac{1}{t + t^2 + o(t^2)} + \frac{8}{t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)} \\ &= \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{1}{1 + t + o(t)} + \frac{8}{1 - \frac{t}{2} + o(t)} \right) \\ &= \frac{1}{t} \cdot \left(1 - t + o(t) + 8 \left(1 + \frac{t}{2} + o(t) \right) \right) \\ &= \frac{1}{t} \cdot ((1+8) + (-1+4)t + o(t)) = \frac{9}{t} + 3 + o(1) = 9x + 3 + o(1). \end{aligned}$$

Quindi l'asintoto di f per $x \to +\infty$ è $y = 9x + 3$.

Esercizio 2. Sia $f(x) = e^{-x}\sin(x)$.

a) Tracciare il grafico di f nell'intervallo $[0, 2\pi]$ specificando: gli intervalli di monotonia, i punti di massimo e di minimo, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

b) Calcolare $\int_0^{+\infty} f(2x)\,dx$.

a) In $[0, 2\pi]$, f è definita e derivabile due volte.
Derivata prima:

$$f'(x) = e^{-x}(-\sin(x) + \cos(x))$$

Quindi f è crescente in $[0, \pi/4]$ e in $[5\pi/4, 2\pi]$ ed è decrescente in $[\pi/4, 5\pi/4]$. Dunque, rispetto all'intervallo $[0, 2\pi]$, $x = \pi/4$ e $x = 2\pi$ sono punti di massimo relativo e $x = 0$ e $x = 5\pi/4$ sono punti di minimo relativo.
Derivata seconda:

$$f''(x) = -e^{-x}(-\sin(x) + \cos(x)) + e^{-x}(-\cos(x) - \sin(x)) = -2e^{-x}\cos(x).$$

Quindi, rispetto all'intervallo $[0, 2\pi]$, f è convessa in $[\pi/2, 3\pi/2]$ ed è concava in $[0, \pi/2]$ e in $[3\pi/2, 2\pi]$. Così $x = \pi/2$ e $x = 3\pi/2$ sono punti di flesso.

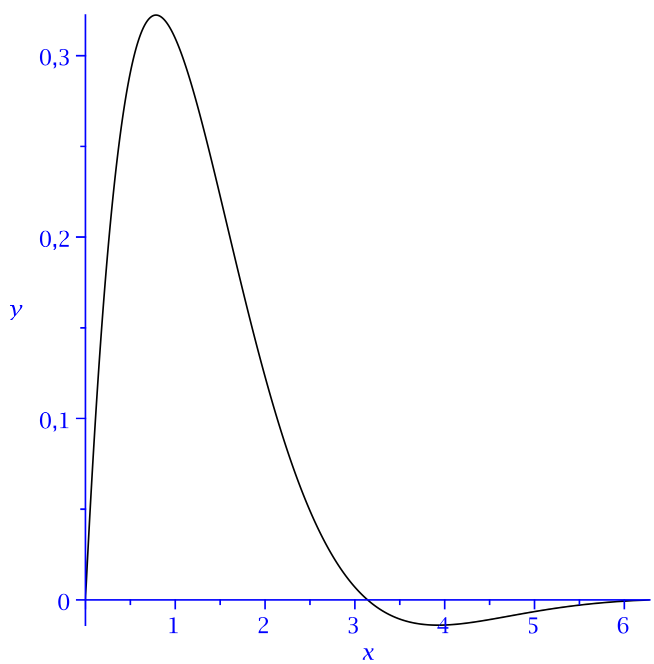

Grafico di $f(x) = e^{-x}\sin(x)$

b) Ponendo $t = 2x$ si ha che $dt = 2dx$ e

$$\int_0^{+\infty} f(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{e^{-t}}{2}(\cos(t)+\sin(t))\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

perché, integrando per parti due volte si ha

$$\int e^{-t}\sin(t)\,dt = \int e^{-t}\,d(-\cos(t)) = -e^{-t}\cos(t) - \int(-e^{-t})(-\cos(t))\,dt$$
$$= -e^{-t}\cos(t) - \int e^{-t}\cos(t)\,dt = -e^{-t}\cos(t) - \int e^{-t}d(\sin(t))$$
$$= -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t) - \int e^{-t}\sin(t)\,dt,$$

e si ottiene

$$\int e^{-t}\sin(t)\,dt = -\frac{e^{-t}}{2}(\cos(t)+\sin(t)) + c.$$

Esercizio 3. Sia $f(x) = |x+1|^{1/|x|} - |x-1|^{1/|x|}$.

a) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

b) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$, la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f(k))^a}{\log^2(k+1)}$ è convergente.

a) Si ricorda il limite notevole

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\log(1+ax)}{x}\right) = e^a.$$

Allora, per $x \to 0^+$,

$$f(x) = (1+x)^{1/x} - (1-x)^{1/x} \to e - e^{-1}$$

e per $x \to 0^-$,

$$f(x) = (1+x)^{-1/x} - (1-x)^{-1/x} = \frac{1}{(1+x)^{1/x}} - \frac{1}{(1-x)^{1/x}} \to e^{-1} - e.$$

b) Per $k \to \infty$,

$$\begin{aligned}
f(k) = (k+1)^{1/k} - (k-1)^{1/k} &= k^{1/k}\left((1+1/k)^{1/k} - (1-1/k)^{1/k}\right) \\
&= k^{1/k}\left(\exp\left(\frac{\log(1+1/k)}{k}\right) - \exp\left(\frac{\log(1-1/k)}{k}\right)\right) \\
&= k^{1/k}\left(\exp\left(\frac{1/k + o(1/k)}{k}\right) - \exp\left(\frac{-1/k + o(1/k)}{k}\right)\right) \\
&= k^{1/k}\left(\exp\left(\frac{1}{k^2} + o(1/k^2)\right) - \exp\left(-\frac{1}{k^2} + o(1/k^2)\right)\right) \\
&= k^{1/k}\left(1 + \frac{1}{k^2} + o(1/k^2) - \left(1 - \frac{1}{k^2} + o(1/k^2)\right)\right) \\
&= k^{1/k}\left(\frac{2}{k^2} + o(1/k^2)\right) \sim 1 \cdot \frac{2}{k^2} \sim \frac{2}{k^2}.
\end{aligned}$$

Così

$$\frac{(f(k))^a}{\log^2(k+1)} \sim \frac{2^a}{k^{2a}\log^2(k)}$$

e la serie data converge se $2a \geq 1$ ossia per $a \geq 1/2$.

Esercizio 4. a) Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$3z^2 + \overline{z}^2 + 8 = 4i\sqrt{3}.$$

b) Per quali $r \in \mathbb{R}$, il seguente sistema ammette almeno una soluzione?

$$\begin{cases} 3z^2 + \overline{z}^2 + 8 = 4i\sqrt{3} \\ z \cdot \overline{z} = r^2 \end{cases}.$$

a) Ponendo $z = x + iy$ con x e y numeri reali e sostituendo nell'equazione si ha che

$$3(x+iy)^2 + (x-iy)^2 + 8 = 4i\sqrt{3}$$

ossia

$$4x^2 - 4y^2 + 4ixy + 8 = 4i\sqrt{3}.$$

Dividendo per 4, e separando la parte reale e la parte immaginaria otteniamo

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2 = 0 \\ xy = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3/x^2 + 2 = 0 \\ y = \sqrt{3}/x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 2x^2 - 3 = 0 \\ y = \sqrt{3}/x \end{cases}.$$

Risolvendo la prima equazione si ottiene $x^2 = -1 \pm \sqrt{1+3}$ ossia $x^2 = 1$ che ha due soluzioni $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$, e $x^2 = -3$ che non ha soluzioni reali.
Quindi le soluzioni complesse dell'equazione data sono:

$$z_1 = x_1 + i\frac{\sqrt{3}}{x_1} = 1 + i\sqrt{3} \qquad \text{e} \qquad z_2 = x_2 + i\frac{\sqrt{3}}{x_2} = -1 - i\sqrt{3}.$$

b) Dato che $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, per a), il sistema ammette almeno una soluzione se r è tale che

$$r^2 = |z_1|^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 \quad \text{oppure} \quad r^2 = |z_2|^2 = (-1)^2 + (-\sqrt{3})^2 = 4$$

ossia per $r = 2$ oppure $r = -2$.