Analisi Matematica - CdL Informatica
Svolgimento della prova scritta del 25/6/2024

Esercizio 1. Sia $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2\log(x)} - \sqrt{1 + 4x(1-x)}$.

a) Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{(\sin(\pi x))^2}$.

b) Determinare se il punto $x_0 = 1$ è per f un punto di minimo relativo, massimo relativo o nessuno dei due.

a) Per $t = x - 1 \to 0$, abbiamo che

$$(\sin(\pi x))^2 = (\sin(\pi t + \pi))^2 = (-\sin(\pi t))^2 = \pi^2 t^2 + o(t^2).$$

Allora anche per $f(x)$ calcoliamo gli sviluppi fino al secondo ordine:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2\log(x)} = \frac{1}{1+2\log(1+t)} &= \frac{1}{1 + (2t - t^2 + o(t^2))} \\ &= 1 - (2t - t^2 + o(t^2)) + (2t - t^2 + o(t^2))^2 + o(t^2) \\ &= 1 - 2t + (1 + 2^2)t^2 + o(t^2) = 1 - 2t + 5t^2 + o(t^2)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + 4x(1-x)} = \sqrt{1 - 4(t + t^2)} &= 1 + \frac{(-4(t+t^2))}{2} - \frac{(-4(t+t^2))^2}{8} + o(t^2) \\ &= 1 - 2t + \left(-\frac{4}{2} - \frac{16}{8}\right) t^2 + o(t^2) = 1 - 2t - 4t^2 + o(t^2).\end{aligned}$$

Così,

$$f(x) = 1 - 2t + 5t^2 + o(t^2) - \big(1 - 2t - 4t^2 + o(t^2)\big) = 9t^2 + o(t^2).$$

Infine

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{(\sin(\pi x))^2} = \lim_{t\to 0} \frac{9t^2 + o(t^2)}{\pi^2 t^2 + o(t^2)} = \frac{9}{\pi^2}.$$

b) Dallo sviluppo di Taylor di f ottenuto in a), si ha che

$$f'(1) = 0 \quad \text{e} \quad f''(1) = 2 \cdot 9 = 18 > 0$$

e quindi $x_0 = 1$ è un punto di minimo relativo.

Esercizio 2. a) Calcolare il polinomio di Taylor di $\tan(x)$ in $x_0 = \frac{\pi}{4}$ di ordine 3 .

b) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^{\pi/4} \frac{(1-x)(\tan(x))^a}{x^{3/2}(1-\tan(x))^{a-1}}\,dx$$

è convergente.

a) Sia $f(x) = \tan(x)$, allora $f(\pi/4) = 1$ e

$$\begin{aligned}
&f'(x) = 1 + \tan^2(x) \implies f'(\pi/4) = 2,\\
&f''(x) = (1 + \tan^2(x))' = 2\tan(x)(1 + \tan^2(x)) \implies f''(\pi/4) = 4,\\
&f'''(x) = 2(\tan(x) + \tan^3(x))' = 2(1 + 3\tan^2(x))(1 + \tan^2(x)) \implies f'''(\pi/4) = 16.
\end{aligned}$$

Così il polinomio di Taylor cercato è

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(\pi/4)}{k!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^k = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3.$$

b) Nell'intervallo $(0, \pi/4)$, i punti da indagare sono due: 0^+ e $(\pi/4)^-$.
Per $x \to 0^+$,

$$\frac{(1-x)(\tan(x))^a}{x^{3/2}(1-\tan(x))^{a-1}} \sim \frac{x^a}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{3/2-a}}.$$

Per la convergenza deve valere la condizione $3/2 - a < 1$ ossia $a > 1/2$.
Per $x \to (\pi/4)^-$, per lo sviluppo di Taylor ottenuto in a), abbiamo che

$$\frac{(1-x)(\tan(x))^a}{x^{3/2}(1-\tan(x))^{a-1}} \sim \frac{C}{\left(1 - \left(1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{a-1}} \sim \frac{C/2^{a-1}}{\left(\frac{\pi}{4} - x\right)^{a-1}}.$$

Per la convergenza deve valere la condizione $a - 1 < 1$ ossia $a < 2$.
Così l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $1/2 < a < 2$.

Esercizio 3. a) Risolvere il problema di Cauchy per $x \in (1, +\infty)$,

$$\begin{cases} xy'(x) = \dfrac{2x^2 y(x)}{1-x^2} + 2 \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

b) Determinare l'asintoto della soluzione $y(x)$ per $x \to +\infty$.

Risistemando i termini abbiamo che

$$y'(x) + \frac{2x}{x^2-1}\, y(x) = \frac{2}{x}.$$

Quindi $a(x) = \frac{2x}{x^2-1}$,

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int \frac{2x}{x^2-1}\, dx = \log(|x^2-1|)$$

e il fattore integrante è $\exp(A(x)) = |x^2 - 1| = x^2 - 1$ (si noti che $x > 1$).
Inoltre,

$$\int \exp(A(x)) f(x)\, dx = \int \frac{2(x^2-1)}{x}\, dx = \int \left(2x - \frac{2}{x}\right) dx = x^2 - 2\log(x) + c.$$

Così la soluzione generale è

$$y(x) = \exp(-A(x)) \int \exp(A(x)) f(x)\, dx = \frac{x^2 - 2\log(x) + c}{x^2-1}.$$

Imponendo la condizione $y(2) = 3$ si trova

$$3 = y(2) = \frac{4 - 2\log(2) + c}{3} \implies c = 5 + 2\log(2)$$

e la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{x^2 - 2\log(x) + 5 + 2\log(2)}{x^2-1}.$$

b) Per $x \to +\infty$,

$$y(x) = \frac{1 + \frac{-2\log(x)+5+2\log(2)}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \to 1.$$

e dunque l'asintoto cercato è $y = 1$.

Esercizio 4. Sia $f(x,y) = xe^y - ye^x$.

a) Verificare che $(1,1)$ è un punto critico di f e studiarne la natura.

b) Dimostrare che $(1,1)$ è l'unico punto critico di f

a) Abbiamo che

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(xe^y - ye^x) = e^y - ye^x$$
$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(xe^y - ye^x) = xe^y - e^x.$$

Quindi $\nabla f(1,1) = (f_x(1,1), f_y(1,1)) = (0,0)$, ossia $(1,1)$ è un punto critico.
Inoltre le derivate seconde di f sono:

$$f_{xx}(x,y) = -ye^x, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = e^y - e^x, \quad f_{yy}(x,y) = xe^y$$

e la matrice hessiana $H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$ nel punto critico è

$$H_f(1,1) = \begin{bmatrix} -e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}.$$

Dato che $\det(H_f(1,1)) = -e^2 < 0$ allora $(1,1)$ è un punto di sella.

b) I punti critici si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} e^y - ye^x = 0 \\ xe^y - e^x = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} e^y = ye^x \\ (xy-1)e^x = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} e^{1/x} = e^x/x \\ y = 1/x \end{cases}, \quad \begin{cases} xe^{1/x} = e^x \\ y = 1/x \end{cases}.$$

Si noti da $xe^{1/x} = e^x$ si ha che $x > 0$ e applicando il logaritmo si ottiene l'equazione equivalente

$$\log(x) + \frac{1}{x} = x.$$

Quindi per dimostrare che $(1,1)$ è l'unico punto critico, basta far vedere che la funzione

$$h(x) := \log(x) + \frac{1}{x} - x$$

ha un unico zero in $x = 1$. Infatti $h(1) = 0$ e h è strettamente decrescente nel suo dominio $(0, +\infty)$ perché

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 1 = -\frac{x^2 - x + 1}{x^2} < 0.$$