

Analisi Matematica - CdL Informatica
Svolgimento della prova scritta del 13/2/2024

Esercizio 1. Sia $f(x) = \arctan(x) + \frac{2x}{1+x^2}$.

a) Tracciare il grafico di f specificando: il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i punti di non derivabilità, i massimi e i minimi relativi, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

b) Tracciare il grafico di $f(|x-1|)$.

a) Il dominio è $D = \mathbb{R}$.

$y = \pi/2$ è l'asintoto per $x \rightarrow +\infty$ mentre $y = -\pi/2$ è l'asintoto per $x \rightarrow -\infty$ perché

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm \frac{\pi}{2} + 0 = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Non ci sono asintoti verticali.

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 2 \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{3-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Quindi f è crescente in $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ ed è decrescente in $(-\infty, -\sqrt{3}]$ e in $[\sqrt{3}, +\infty)$. Dunque $x = \sqrt{3}$ è un punto di massimo relativo e $x = -\sqrt{3}$ è un punto di minimo relativo.

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (3-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-7)}{(1+x^2)^3}.$$

Quindi f è convessa in $[-\sqrt{7}, 0]$ e in $[\sqrt{7}, +\infty)$ ed è concava in $(-\infty, -\sqrt{7}]$ e in $[0, \sqrt{7}]$. Così $x = 0$, $x = -\sqrt{7}$ e $x = \sqrt{7}$ sono punti di flesso.

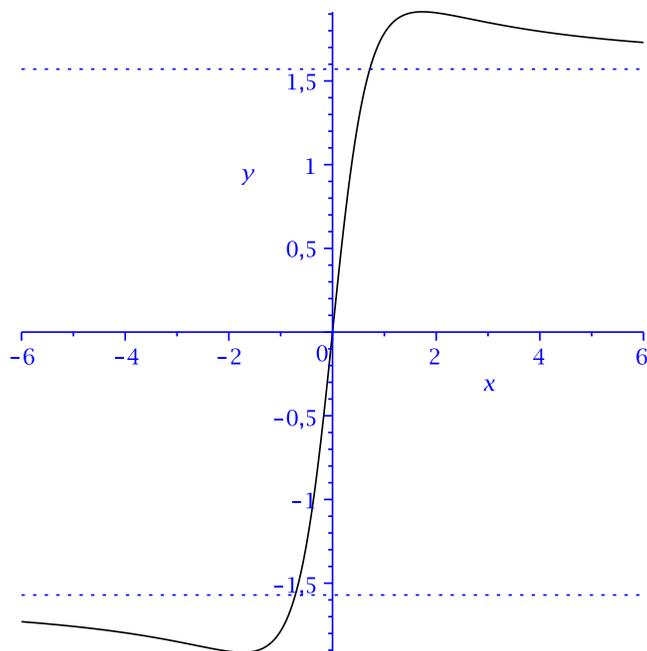


Grafico di $f(x) = \arctan(x) + \frac{2x}{1+x^2}$

b) Il grafico di $f(|x - 1|)$ è simmetrico rispetto alla retta $x = 1$. Inoltre $f(|x - 1|) = f(x - 1)$ per $x \geq 1$.

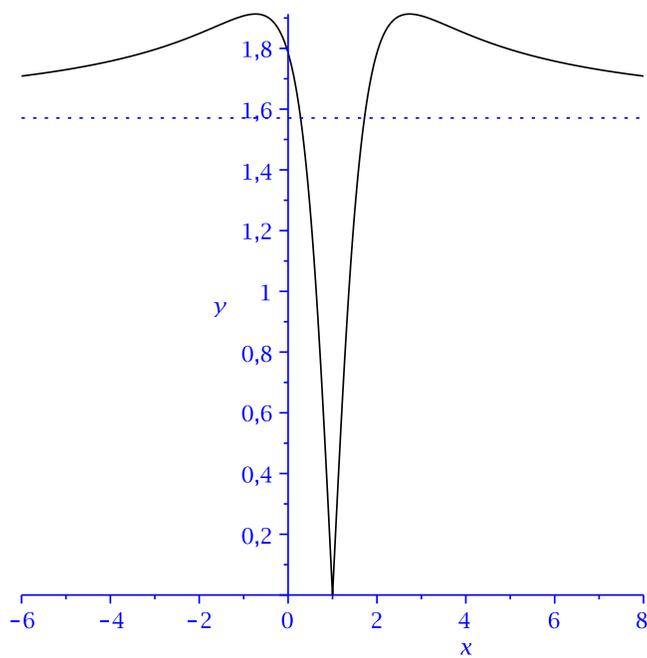


Grafico di $f(|x - 1|)$

Esercizio 2. Sia $f(x) = \sqrt{\cos(2x + x^2) + \frac{x \sin(x)}{1 + x^2}}$.

a) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine $n = 4$ di f in $x_0 = 0$.

b) Determinare se il punto $x_0 = 0$ è per f un punto di minimo relativo, massimo relativo o nessuno dei due.

a) Abbiamo che per $x \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}\cos(2x + x^2) &= 1 - \frac{1}{2}(2x + x^2)^2 + \frac{1}{24}(2x + x^2)^4 + o(x^4) = 1 - (2x^2 + 2x^3 + \frac{x^4}{2}) + \frac{2x^4}{3} + o(x^4) \\ &= 1 - 2x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{x \sin(x)}{1 + x^2} &= x \sin(x)(1 + x^2)^{-1} = x \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) (1 - x^2 + o(x^3)) \\ &= x^2 + \left(-1 - \frac{1}{6} \right) x^4 + o(x^4) = x^2 - \frac{7x^4}{6} + o(x^4).\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\cos(2x + x^2) + \frac{x \sin(x)}{1 + x^2} &= 1 - 2x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{6} + x^2 - \frac{7x^4}{6} + o(x^4) \\ &= 1 - x^2 - 2x^3 - x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Infine, ricordando che per $t \rightarrow 0$, $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$,

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 + \frac{1}{2} \left(-x^2 - 2x^3 - x^4 + o(x^4) \right) - \frac{1}{8} \left(-x^2 + o(x^2) \right)^2 + o((x^2)^2) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - x^3 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{5x^4}{8} + o(x^4).\end{aligned}$$

Così il polinomio di Taylor cercato è

$$T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{5x^4}{8}.$$

b) Il punto $x_0 = 0$ è per f un punto di massimo relativo.

Infatti dal T_4 calcolato in a) si ha che $f'(0) = 0$, e quindi x_0 è un punto stazionario, e che $f''(0) = -1 < 0$, e quindi f è strettamente concava in un intorno di 0. Si conclude così che $x_0 = 0$ è un punto di massimo relativo.

Esercizio 3. Sia $f(x) = e^{-2x} \log(3 + e^{x+|x|})$.

a) Dimostrare che esiste $r > 0$ tale che f è strettamente decrescente in $(r, +\infty)$.

b) Calcolare $\int_{-\log(2)}^{+\infty} f(x) dx$.

a) Per $x > 0$, $x + |x| = 2x$ e la derivata prima di f è

$$f'(x) = -2e^{-2x} \log(3 + e^{2x}) + e^{-2x} \frac{2e^{2x}}{3 + e^{2x}} = 2e^{-2x} \left(-\log(2 + e^{2x}) + \frac{e^{2x}}{2 + e^{2x}} \right).$$

Dato che $2e^{-2x} > 0$, per dimostrare la stretta decrescenza basta far vedere che l'altro fattore $-\log(2 + e^{2x}) + \frac{e^{2x}}{2 + e^{2x}}$ è definitivamente negativo per $x \rightarrow +\infty$. Questo, per definizione di limite, si deduce dal fatto che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\log(2 + e^{2x}) + \frac{e^{2x}}{2 + e^{2x}} \right) = -\infty + 1 = -\infty.$$

b) Dato che $x + |x| = 0$ se $x \leq 0$ e $x + |x| = 2x$ se $x \geq 0$,

$$\int_{-\log(2)}^{+\infty} f(x) dx = \log(4) \int_{-\log(2)}^0 e^{-2x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-2x} \log(3 + e^{2x}) dx.$$

Il primo integrale vale

$$\int_{-\log(2)}^0 e^{-2x} dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_{-\log(2)}^0 = \frac{1 - 4}{-2} = \frac{3}{2}.$$

Per il secondo integrale, posto $t = e^{2x}$, si ha che $x = \log(t)/2$, $dx = dt/(2t)$ e, integrando per parti, si trova

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-2x} \log(3 + e^{2x}) dx &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\log(3 + t)}{t^2} dt = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \log(3 + t) d(-1/t) \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\log(3 + t)}{t} \right]_1^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(3 + t)} dt \\ &= \frac{\log(4)}{2} + \frac{1}{6} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + 3} \right) dt \\ &= \log(2) + \frac{1}{6} \left[\log \left(\frac{t}{t + 3} \right) \right]_1^{+\infty} = \frac{4 \log(2)}{3}. \end{aligned}$$

Così

$$\int_{-\log(2)}^{+\infty} f(x) dx = \frac{3}{2} \log(4) + \frac{4 \log(2)}{3} = \frac{13 \log(2)}{3}.$$

Esercizio 4. a) Risolvere la seguente equazione in \mathbb{C} :

$$\bar{z}^2(|z|^2 - 5) = 6.$$

b) Quante sono le soluzioni dell'equazione $\bar{z}^6(|z|^6 - 5) = 6$?

a) Ponendo $z = x + iy$ con x e y numeri reali e sostituendo nell'equazione si ha che

$$(x - iy)^2(x^2 + y^2 - 5) = 6$$

ossia

$$(x^2 - y^2 - 2ixy)(x^2 + y^2 - 5) = 6.$$

Separando la parte reale e la parte immaginaria otteniamo

$$\begin{cases} (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 5) = 6 \\ -2xy(x^2 + y^2 - 5) = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} -y^2(y^2 - 5) = 6 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2(x^2 - 5) = 6 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} (x^2 - y^2)0 = 6 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} y^4 - 5y^2 + 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^4 - 5x^2 - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \emptyset$$

da cui

$$\begin{cases} y \in \{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}\} \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \in \{\pm\sqrt{6}\} \\ y = 0 \end{cases}$$

Così le soluzioni dell'equazione data sono sei:

$$\pm\sqrt{2}i, \quad \pm\sqrt{3}i, \quad \pm\sqrt{6}.$$

b) Ponendo $w = z^3$, l'equazione data diventa

$$\bar{w}^2(|w|^2 - 5) = 6$$

che per a) ha 6 soluzioni non nulle. Così per ottenere le z basta trovare le 3 radici cubiche di ciascuna delle 6 soluzioni e dunque l'equazione data ha $3 \cdot 6 = 18$ soluzioni.