Analisi Matematica - CdL Informatica
Svolgimento della prova scritta del 13/2/2024

Esercizio 1. Sia $f(x) = \arctan(x) + \dfrac{2x}{1+x^2}$.

a) Tracciare il grafico di f specificando: il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i punti di non derivabilità, i massimi e i minimi relativi, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

b) Tracciare il grafico di $f(|x-1|)$.

a) Il dominio è $D = \mathbb{R}$.
$y = \pi/2$ è l'asintoto per $x \to +\infty$ mentre $y = -\pi/2$ è l'asintoto per $x \to -\infty$ perché

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\frac{\pi}{2} + 0 = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Non ci sono asintoti verticali.
Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 2\,\frac{(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{3-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Quindi f è crescente in $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ ed è decrescente in $(-\infty, -\sqrt{3}]$ e in $[\sqrt{3}, +\infty)$. Dunque $x = \sqrt{3}$ è un punto di massimo relativo e $x = -\sqrt{3}$ è un punto di minimo relativo.
Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (3-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-7)}{(1+x^2)^3}.$$

Quindi f è convessa in $[-\sqrt{7}, 0]$ e in $[\sqrt{7}, +\infty)$ ed è concava in $(-\infty, -\sqrt{7}]$ e in $[0, \sqrt{7}]$. Così $x = -\sqrt{7}$ e $x = \sqrt{7}$ sono punti di flesso.

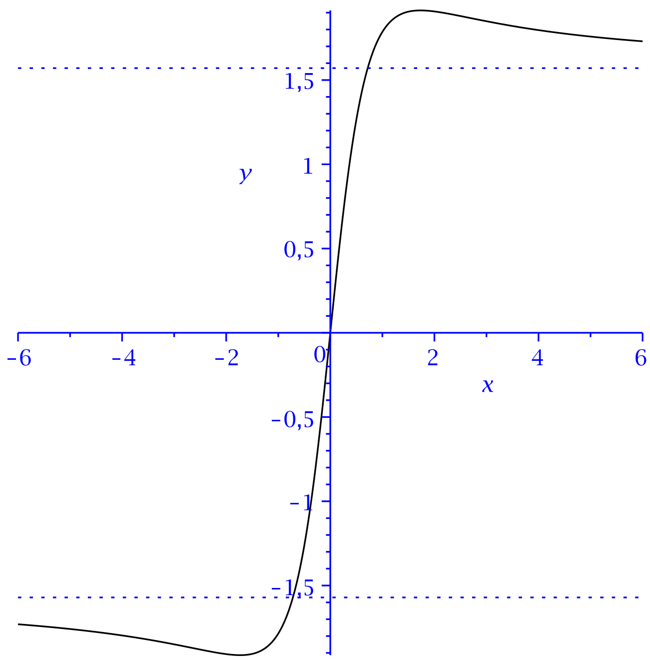

Grafico di $f(x) = \arctan(x) + \dfrac{2x}{1+x^2}$

b) Il grafico di $f(|x-1|)$ è simmetrico rispetto alla retta $x = 1$. Inoltre $f(|x-1|) = f(x-1)$ per $x \geq 1$.

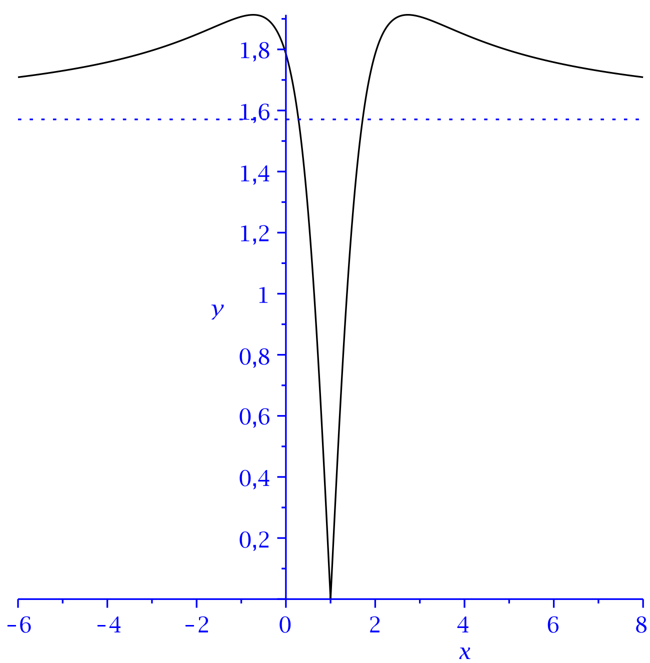

Grafico di $f(|x-1|)$

Esercizio 2. Sia $f(x) = \sqrt{\cos(2x + x^2) + \dfrac{x\sin(x)}{1 + x^2}}$.

a) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine $n = 4$ di f in $x_0 = 0$.

b) Determinare se il punto $x_0 = 0$ è per f un punto di minimo relativo, massimo relativo o nessuno dei due.

a) Abbiamo che per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}\cos(2x + x^2) &= 1 - \frac{1}{2}(2x + x^2)^2 + \frac{1}{24}(2x + x^2)^4 + o(x^4) = 1 - (2x^2 + 2x^3 + \frac{x^4}{2}) + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)\\ &= 1 - 2x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{x\sin(x)}{1 + x^2} &= x\sin(x)(1 + x^2)^{-1} = x\Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big)(1 - x^2 + o(x^3))\\ &= x^2 + \Big(- 1 - \frac{1}{6}\Big)x^4 + o(x^4) = x^2 - \frac{7x^4}{6} + o(x^4).\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\cos(2x + x^2) + \frac{x\sin(x)}{1 + x^2} &= 1 - 2x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{6} + x^2 - \frac{7x^4}{6} + o(x^4)\\ &= 1 - x^2 - 2x^3 - x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Infine, ricordando che per $t \to 0$, $\sqrt{1 + t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$,

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 + \frac{1}{2}\Big(- x^2 - 2x^3 - x^4 + o(x^4)\Big) - \frac{1}{8}\Big(- x^2 + o(x^2)\Big)^2 + o((x^2)^2)\\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - x^3 + \Big(- \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\Big)x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{5x^4}{8} + o(x^4).\end{aligned}$$

Così il polinomio di Taylor cercato è

$$T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{5x^4}{8}.$$

b) Il punto $x_0 = 0$ è per f un punto di massimo relativo.
Infatti dal T_4 calcolato in a) si ha che $f'(0) = 0$, e quindi x_0 è un punto stazionario, e che $f''(0) = -1 < 0$, e quindi f è strettamente concava in un intorno di 0. Si conclude così che $x_0 = 0$ è un punto di massimo relativo.

Esercizio 3. Sia $f(x) = e^{-2x}\log(3 + e^{x+|x|})$.

a) Dimostrare che esiste $r > 0$ tale che f è strettamente decrescente in $(r, +\infty)$.

b) Calcolare $\displaystyle\int_{-\log(2)}^{+\infty} f(x)\,dx$.

a) Per $x > 0$, $x + |x| = 2x$ e la derivata prima di f è

$$f'(x) = -2e^{-2x}\log(3 + e^{2x}) + e^{-2x}\frac{2e^{2x}}{3 + e^{2x}} = 2e^{-2x}\Big(- \log(2 + e^{2x}) + \frac{e^{2x}}{2 + e^{2x}}\Big).$$

Dato che $2e^{-2x} > 0$, per dimostrare la stretta decrescenza basta far vedere che l'altro fattore $-\log(2+e^{2x})+\frac{e^{2x}}{2+e^{2x}}$ è definitivamente negativo per $x \to +\infty$. Questo, per definizione di limite, si deduce dal fatto che

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(- \log(2 + e^{2x}) + \frac{e^{2x}}{2 + e^{2x}}\Big) = -\infty + 1 = -\infty.$$

b) Dato che $x + |x| = 0$ se $x \le 0$ e $x + |x| = 2x$ se $x \ge 0$,

$$\int_{-\log(2)}^{+\infty} f(x)\,dx = \log(4)\int_{-\log(2)}^{0} e^{-2x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-2x}\log(3 + e^{2x})\,dx.$$

Il primo integrale vale

$$\int_{-\log(2)}^{0} e^{-2x}\,dx = \Big[\frac{e^{-2x}}{-2}\Big]_{-\log(2)}^{0} = \frac{1-4}{-2} = \frac{3}{2}.$$

Per il secondo integrale, posto $t = e^{2x}$, si ha che $x = \log(t)/2$, $dx = dt/(2t)$ e, integrando per parti, si trova

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-2x}\log(3 + e^{2x})\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\log(3+t)}{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\log(3+t)d(-1/t)\\
&= \frac{1}{2}\Big[-\frac{\log(3+t)}{t}\Big]_1^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{t(3+t)}\,dt\\
&= \frac{\log(4)}{2} + \frac{1}{6}\int_1^{+\infty}\Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+3}\Big)\,dt\\
&= \log(2) + \frac{1}{6}\Big[\log\Big(\frac{t}{t+3}\Big)\Big]_1^{+\infty} = \frac{4\log(2)}{3}.
\end{aligned}$$

Così

$$\int_{-\log(2)}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{3}{2}\log(4) + \frac{4\log(2)}{3} = \frac{13\log(2)}{3}.$$

Esercizio 4. a) Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$\overline{z}^2(|z|^2 - 5) = 6.$$

b) Quante sono le soluzioni dell'equazione $\overline{z}^6(|z|^6 - 5) = 6$?

a) Ponendo $z = x + iy$ con x e y numeri reali e sostituendo nell'equazione si ha che

$$(x - iy)^2(x^2 + y^2 - 5) = 6$$

ossia

$$(x^2 - y^2 - 2ixy)(x^2 + y^2 - 5) = 6.$$

Separando la parte reale e la parte immaginaria otteniamo

$$\begin{cases} (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 5) = 6 \\ -2xy(x^2 + y^2 - 5) = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} -y^2(y^2 - 5) = 6 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2(x^2 - 5) = 6 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} (x^2 - y^2)0 = 6 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} y^4 - 5y^2 + 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^4 - 5x^2 - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \emptyset$$

da cui

$$\begin{cases} y \in \{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}\} \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \in \{\pm\sqrt{6}\} \\ y = 0 \end{cases}$$

Così le soluzioni dell'equazione data sono sei:

$$\pm\sqrt{2}i, \quad \pm\sqrt{3}i, \quad \pm\sqrt{6}.$$

b) Ponendo $w = z^3$, l'equazione data diventa

$$\overline{w}^2(|w|^2 - 5) = 6$$

che per a) ha 6 soluzioni non nulle. Così per ottenere le z basta trovare le 3 radici cubiche di ciascuna delle 6 soluzioni e dunque l'equazione data ha $3 \cdot 6 = 18$ soluzioni.