Analisi Matematica - CdL Informatica
Svolgimento della prova scritta del 23/1/2024

Esercizio 1. Sia $f(x) = x + \log(|x^2 - 3|)$.

a) Tracciare il grafico di f specificando: il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

b) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = c$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

È necessario che $|x^2 - 3| > 0$, ossia $x^2 \neq 3$ e dunque il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$.
Non ci sono asintoti a $\pm\infty$ perché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \log(|x^2 - 3|) = +\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\sqrt{3}} f(x) = -\infty$$

e quindi $x = \sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$ sono asintoti verticali.
Per $x \in D$,

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 - 3} = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{x^2 - 3}.$$

Quindi f è strettamente crescente in $(-\infty, -3]$, in $(-\sqrt{3}, 1]$ e in $(\sqrt{3}, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $[-3, -\sqrt{3})$ e in $[1, \sqrt{3})$. Dunque $x = -3$ e $x = 1$ sono entrambi punti di massimo relativo. Non ci sono punti punti di massimo o minimo assoluti. Per $x \in D$,

$$f''(x) = \left(1 + \frac{2x}{x^2 - 3}\right)' = 0 + 2\,\frac{(x^2 - 3) - x(2x)}{(x^2 - 3)^2} = -\frac{2(x^2 + 3)}{(x^2 - 3)^2}.$$

Dato che f'' è sempre negativa, f è concava in ogni intervallo contenuto in D. Non ci sono punti di flesso.
b) Dopo aver tracciato il grafico e notato che

$$f(1) = 1 + \log(2) > f(-3) = -3 + \log(6),$$

applicando il teorema dei valori intermedi alla funzione continua f si ha che l'equazione $f(x) = c$ ha

$$\begin{cases} 1 \text{ soluzione se } c > 1 + \log(2) \\ 2 \text{ soluzione se } c = 1 + \log(2) \\ 3 \text{ soluzione se } -3 + \log(6) < c < 1 + \log(2) \\ 4 \text{ soluzione se } c = -3 + \log(6) \\ 5 \text{ soluzione se } c < -3 + \log(6) \end{cases}$$

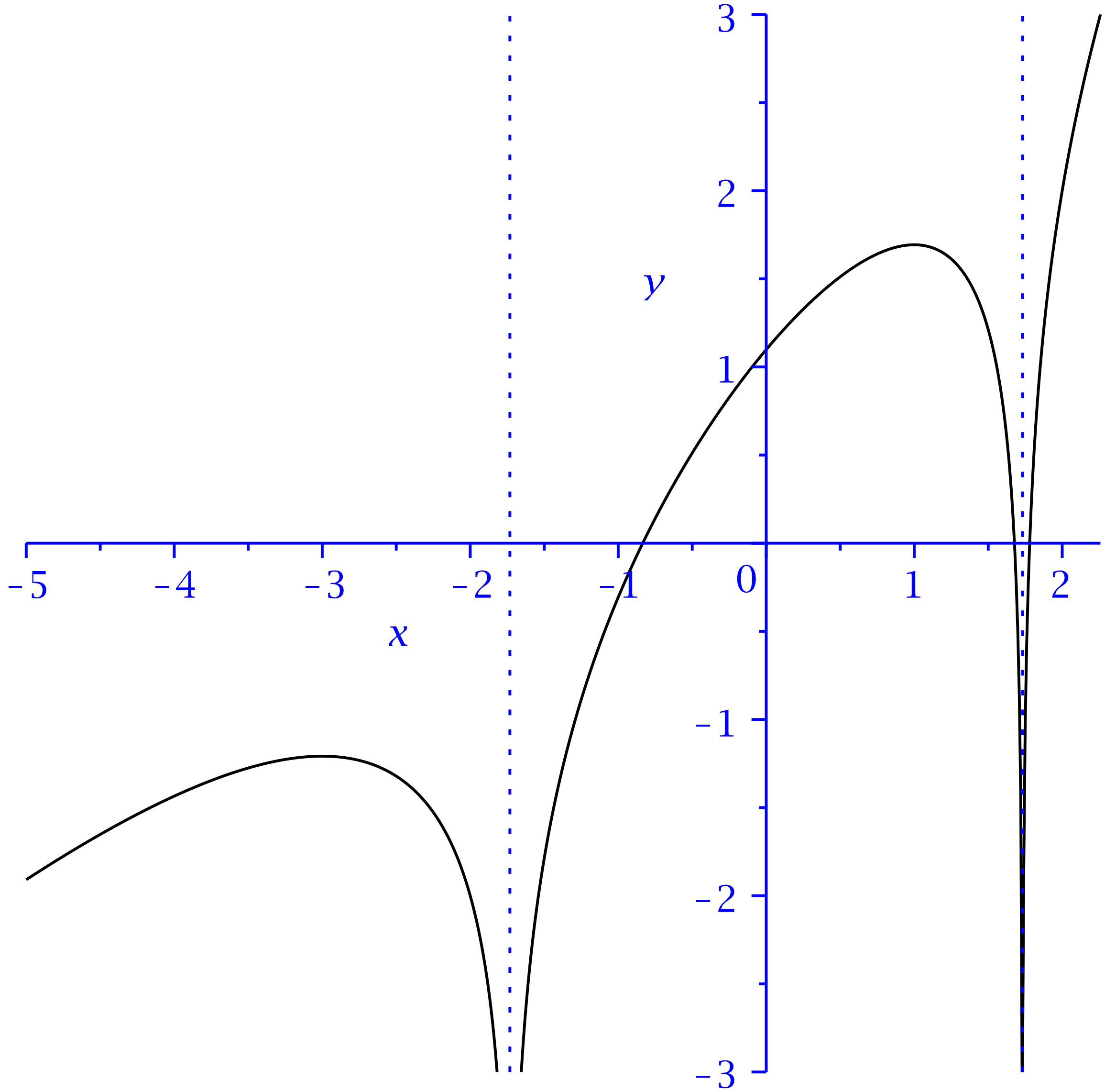

Grafico di $f(x) = x + \log(|x^2 - 3|)$

Esercizio 2. Sia $f(x) = \dfrac{1}{1+4\log(x)} - \dfrac{4}{x^{2x}+\sin(x^2-x)}$.

a) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine $n=2$ di f in $x_0 = 1$.

b) Qual è l'asintoto di $xf\left(\frac{x+1}{x-3}\right)$ per $x \to +\infty$?

a) Posto $t = x-1$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+4\log(x)} &= \frac{1}{1+4\log(1+t)} = \frac{1}{1+4(t-t^2/2+o(t^2))} = (1+4t-2t^2+o(t^2))^{-1}\\ &= 1-(4t-2t^2+o(t^2))+(4t+o(t))^2+o(t^2) = 1-4t+18t^2+o(t^2)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{4}{x^{2x}+\sin(x^2-x)} &= \frac{4}{(1+t)^{2(1+t)}+\sin(t+t^2)} = \frac{4}{1+2t+3t^2+o(t^2)+t+t^2+o(t^2)}\\ &= 4(1+3t+4t^2+o(t^2))^{-1}\\ &= 4(1-(3t+4t^2+o(t^2))+(3t+o(t))^2+o(t^2)) = 4-12t+20t^2+o(t^2)\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}(1+t)^{2(1+t)} &= \exp(2(1+t)\log(1+t)) = \exp(2(1+t)(t-t^2/2+o(t^2)))\\ &= \exp(2t+t^2+o(t^2)) = 1+(2t+t^2+o(t^2))+\frac{1}{2}(2t+o(t))^2+o(t^2)\\ &= 1+2t+3t^2+o(t^2).\end{aligned}$$

Infine, calcolando la differenza,

$$f(x) = 1-4t+18t^2+o(t^2)-(4-12t+20t^2+o(t^2)) = -3+8t-2t^2+o(t^2).$$

Così il polinomio di Taylor cercato è

$$T_2(x) = -3+8(x-1)-2(x-1)^2.$$

b) Dato che per $x \to +\infty$,

$$\frac{x+1}{x-3} = 1+\frac{4}{x-3} = 1+\frac{4}{x}+o(1/x),$$

si ha che, per la parte a), posto $t = 4/x+o(1/x)$,

$$xf\left(\frac{x+1}{x-3}\right) = x\left(-3+8\left(\frac{4}{x}+o(1/x)\right)+o(1/x)\right) = -3x+32+o(1)$$

ossia l'asintoto cercato è $y=-3x+32$.

Esercizio 3. Sia $f(x) = \dfrac{\arctan(\sqrt{6x})}{x\sqrt{x}}$.

a) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{f(x)x^a}{(\log(3+x^4))^2}\,dx$ è convergente.

b) Calcolare $\displaystyle\int_{1/6}^{+\infty} f(x)\,dx$.

a) Nell'intervallo $(0,+\infty)$, i punti da indagare sono due: 0^+ e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$,

$$\frac{f(x)x^a}{(\log(3+x^4))^2} \sim \frac{\sqrt{6}\sqrt{x}\,x^a}{x\sqrt{x}\log(3)^2} = \frac{c_1}{x^{1-a}}.$$

Per la convergenza deve valere la condizione $1-a<1$ ossia $a>0$.
Per $x \to +\infty$ abbiamo che

$$\frac{f(x)x^a}{(\log(3+x^4))^2} \sim \frac{\pi/2\,x^a}{x\sqrt{x}(\log(x^4))^2} = \frac{c_2}{x^{3/2-a}(\log(x))^2}.$$

Per la convergenza deve valere la condizione $3/2-a \geq 1$ ossia $a \leq 1/2$.
Così l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $0 < a \leq 1/2$.

b) Posto $t = \sqrt{6x}$, si ha che $x = t^2/6$, $dx = t dt/3$ e

$$\begin{aligned}\int_{1/6}^{+\infty} \frac{\arctan(\sqrt{6x})}{x\sqrt{x}}\,dx &= \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{(t^2/6)(t/\sqrt{6})}\,t dt/3 \\ &= 2\sqrt{6}\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2}\,dt = \sqrt{6}\left(\frac{\pi}{2}+\log(2)\right)\end{aligned}$$

perché, integrando per parti,

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2}\,dt &= \int_1^{+\infty} \arctan(t)d(-1/t) \\ &= \left[-\frac{\arctan(t)}{t}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt \\ &= \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right)dt = \frac{\pi}{4} + \left[\log(t) - \frac{1}{2}\log(1+t^2)\right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{4} + \left[\log\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{\log(2)}{2}.\end{aligned}$$

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$,

$$\begin{cases} \cos(x)y'(x) = \sin(x)y(x) + e^{2x}(x-3) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

e determinare la retta tangente al grafico della soluzione nel punto assegnato.

Risistemando i termini (si noti che $\cos(x) > 0$ per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$), abbiamo che

$$y'(x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}y(x) = \frac{e^{2x}(x-3)}{\cos(x)}.$$

Quindi $a(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$,

$$A(x) = \int a(x)\,dx = -\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = \log(\cos(x))$$

e il fattore integrante è $\exp(A(x)) = \cos(x)$.
Inoltre, integrando per parti,

$$\begin{aligned} \int \exp(A(x))f(x)\,dx &= \int \cos(x)\,\frac{e^{2x}(x-3)}{\cos(x)}\,dx = \int e^{2x}(x-3)\,dx \\ &= \int (x-3)\,d(e^{2x}/2) = (x-3)\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx \\ &= (x-3)\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c = (2x-7)\frac{e^{2x}}{4} + c. \end{aligned}$$

Così la soluzione generale è

$$y(x) = \exp(-A(x))\int \exp(A(x))f(x)\,dx = \frac{(2x-7)\frac{e^{2x}}{4} + c}{\cos(x)}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 2$ si trova

$$2 = y(0) = -\frac{7}{4} + c \implies c = 2 + \frac{7}{4} = \frac{15}{4}$$

e la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{(2x-7)e^{2x} + 15}{4\cos(x)}.$$

Dall'equazione differenziale valutata in $x = 0$ si ha che

$$\cos(0)y'(0) = \sin(0)y(0) + e^0(0-3) \implies y'(0) = -3$$

e la retta tangente al grafico di $y(x)$ nel punto $(0, 2)$ è

$$y = y'(0)(x-0) + y(0) = -3x + 2.$$