Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica
Soluzione della prova scritta del 15-9-2023

Esercizio 1. Sia $f(x,y) = \big(1 + x^4 y\big)^{1/(x^2+y^2)}$

(a) Disegnare il dominio di f.

(b) Determinare per quali $a > 0$ il seguente limite esiste e nel caso calcolarlo:

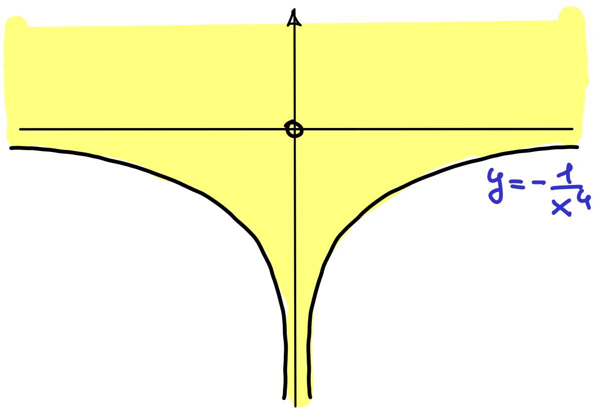
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-1}{(x^2+y^2)^a}.$$

(a) Le condizioni di esistenza di $(1+x^4y)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ sono

$$\begin{cases} x^2+y^2 \neq 0 \quad (x^2+y^2>0) \\ 1+x^4y \geq 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \geq -\frac{1}{x^4} \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$



(b) Per $(x,y)\to(0,0)$ si ha che $x^4y \to 0$ e

$$f(x,y) = \exp\left(\frac{\log(1+x^4y)}{x^2+y^2}\right) \sim \exp\Bigg(\overbrace{\frac{x^4y}{x^2+y^2}}^{\to 0}\Bigg) \sim 1 + \frac{x^4y}{x^2+y^2}$$

e quindi

$$\frac{f(x,y)-1}{(x^2+y^2)^a} \sim \frac{x^4y}{(x^2+y^2)^{a+1}} \overset{CP}{\sim} \rho^{\overbrace{5-2(a+1)}^{3-2a}} \cdot \overbrace{\cos^4\theta \cdot \operatorname{sen}\theta}^{\text{limitata}}$$

Così se $3-2a>0$ ossia per $0<a<\frac{3}{2}$ il limite esiste e vale 0.

Per $a \geq \frac{3}{2}$ il limite non esiste.

1) lungo $y=0$ per $x\to 0^+$ $(\theta=0)$ il limite vale 0.

2) lungo $y=x$ per $x\to 0^+$ $(\theta=\frac{\pi}{4})$ il limite vale $+\infty$ o $2^{-5/2}$ $(\neq 0)$.

Esercizio 2. Sia $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(2y^2e^{xy}+z, e^{xy}(2xy+a), x\right)$ con $a \in \mathbb{R}$.

(a) Per quali valori di a il campo $\boldsymbol{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^3$?
Per ognuno di tali valori determinare una funzione potenziale di $\boldsymbol{F}$.

(b) Calcolare $\int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s}\rangle$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ dove γ è il segmento da $(1,0,2)$ a $(1,2,0)$.

(a) Dato che $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, $\vec{F}$ è conservativo se e solo se $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y^2e^{xy}+z & e^{xy}(2xy+a) & x \end{bmatrix}$$

$$= \left(0, -1+1, e^{xy}\left(y(2xy+a)+2y-4y-2xy^2\right)\right)$$

$$= \left(0,0,y(2-a)\right) = (0,0,0) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^2$$

se e solo se $a=2$. Per $a=2$,

$$\begin{cases} U_x = 2y^2e^{xy}+z = C_x + z \\ U_y = 2e^{xy}(xy+1) = C_y \\ U_z = x \quad \rightarrow U = \int x\,dz = xz + C(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_x = 2y^2e^{xy} \\ C_y = 2e^{xy}(xy+1) \end{cases}$$

$$C = \int 2y^2e^{xy}dx = 2ye^{xy} + C_1(y) \overset{\partial/\partial y}{\Longrightarrow} C_1'(y) = 0$$

Quindi $U(x,y,z) = xz + 2ye^{xy}$.

(b) $\vec{\gamma}(t) = (1-t)(1,0,2) + t(1,2,0) = (1,2t,2-2t)$ con $t \in [0,1]$

Così $\vec{\gamma}' = (1,2,-2)$ e

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle \overset{\vec{F} = \nabla U + (a-2)(0,e^{xy},0)}{=} U(1,2,0) - U(1,0,2) + (a-2)\int_0^1 e^{2t}\cdot 2\,dt$$

$$= -2 + 4e^2 + (a-2)\left[e^{2t}\right]_0^1 = (a+2)e^2 - a.$$

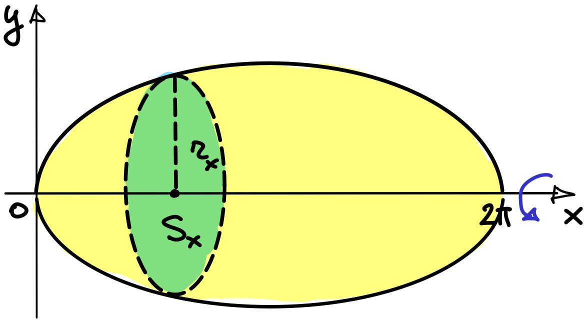
Esercizio 3. Sia S la superficie generata dalla rotazione completa della curva

$$C = \{(t - \sin(t), 1 - \cos(t), 0) \in \mathbb{R}^3 : t \in [0, 2\pi]\}$$

attorno all'asse x.

(a) Calcolare il volume del solido racchiuso dalla superficie S.

(b) Calcolare l'area della superficie S.



(a) Il solido di rotazione è l'unione dei dischi dati dalle sezioni S_x:

$$V = \int_{x=0}^{2\pi} \pi \cdot r_x^2 \, dx \underset{\substack{x = t - \sin t \\ r_x = y = 1 - \cos t}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} \pi (1-\cos t)^2 \underbrace{(t - \sin t)'}_{1-\cos t} dt$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt = \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t + \cos^3 t) dt$$

$$= \pi (2\pi - 3 \cdot 0 + 3 \cdot \pi + 0) = 5\pi^2.$$

(b) L'area della superficie di rotazione è data da

$$A = 2\pi \int_\gamma y \, ds = 2\pi \int_0^{2\pi} y(t) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t) \sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\cos t} \, dt \qquad \sqrt{1-\cos t} = \frac{|\sin t|}{\sqrt{1+\cos t}}$$

$$= 4\pi\sqrt{2} \int_0^{\pi} (1-\cos t) \frac{\sin t}{\sqrt{1+\cos t}} dt$$

$u = 1 + \cos t$

$$= 4\pi\sqrt{2} \int_0^2 \frac{2-u}{\sqrt{u}} du = 4\pi\sqrt{2} \left[2\frac{u^{1/2}}{1/2} - \frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_0^2 = \frac{64\pi}{3}.$$

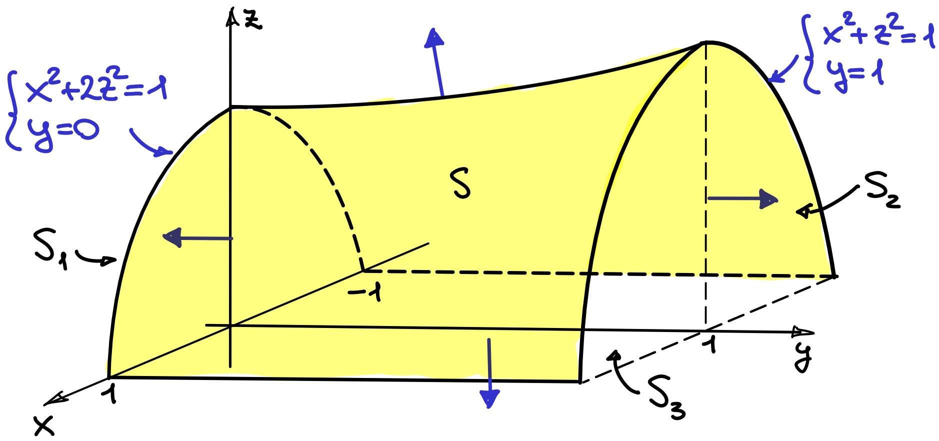
Esercizio 4. Si consideri la superficie

$$S = \{(x,y,z) : x^2 + (2-y)z^2 = 1, 0 \le y \le 1, z \ge 0\}$$

orientata in modo che $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k} \rangle \ge 0$.

(a) Determinare l'equazione del piano tangente a S nel punto $\left(0, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

(b) Calcolare $\iint_S \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S} \rangle$ dove $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(2xy, -2y^2, 5y + 2yz\right)$.



(a) Il punto $\left(0, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ sta sulla superficie

$$f(x,y,z) = x^2 + (2-y)z^2 = 1$$

e dunque il piano tangente è

$$\left\langle \nabla f\left(0, \tfrac{1}{2}, \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right), \left(x, y - \tfrac{1}{2}, z - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) \right\rangle = 0 \Rightarrow -2y + 3\sqrt{6}\, z = 5.$$

$$\nabla f\left(0, \tfrac{1}{2}, \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = \left(2x, -z^2, 2(2-y)z\right)\Big|_{\left(0, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)} = \left(0, -\tfrac{2}{3}, \sqrt{6}\right)$$

(b) Notiamo che $\operatorname{div}(\vec{F}) = 2y - 4y + 2y = 0$

Quindi, per il teorema della divergenza,

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \overset{TD}{=} \iiint_D \overset{=0}{\operatorname{div}(\vec{F})} - \iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

dove D è il solido racchiuso da $S \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$ con

$$S_1 = \{(x,0,z) : x^2 + 2z^2 \le 1 \text{ e } z \ge 0\} \qquad \vec{n} = (0,-1,0),$$

$$S_2 = \{(x,1,z) : x^2 + z^2 \le 1 \text{ e } z \ge 0\} \qquad \vec{n} = (0,1,0),$$

$$S_3 = \{(x,y,0) : x \in [-1,1], y \in [0,1]\} \qquad \vec{n} = (0,0,-1).$$

Così

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = -\iint_{S_1} \langle (*,0,*),(0,-1,0) \rangle \quad = 0$$

$$-\iint_{S_2} \langle (*,-2,*),(0,1,0) \rangle \quad = 2|S_2| = 2\frac{\pi}{2} = \pi$$

$$-\iint_{S_3} \langle (*,*,5y),(0,0,-1) \rangle \quad = 5 \cdot 2 \cdot \int_0^1 y\,dy = 5$$

$$= 0 + \pi + 5 = \pi + 5.$$