

Esercizio 1. Sia $f(x, y) = |x + y|$.

(a) Determinare il valore massimo e il valore minimo di f in

$$D = \{(x, y) : y^2 \leq x + 4, x \leq \sqrt{4 - y^2}\}.$$

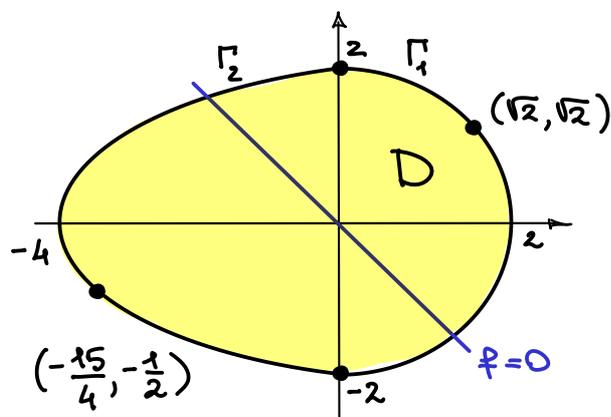
(b) Fare un esempio di insieme aperto, non vuoto e limitato $A \subset \mathbb{R}^2$ tale che la funzione f non abbia in A nè punti di minimo nè punti di massimo.

(a) Dato che $f(x, y) = |x + y| \geq 0$ e $f = 0$ lungo la retta $y = -x$ che interseca D , il valore minimo di f in D è 0. Per determinare il valore massimo consideriamo $h(x, y) = x + y$.
 $\nabla h(x, y) = (1, 1)$ e quindi h non ha punti stazionari.

Analisi lungo $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

$$\Gamma_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4, x \in [0, 2]\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) : y^2 = x + 4, x \in [-4, 0)\}$$



Γ_1) Moltiplicatori di Lagrange. Sia $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$.

$\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$ in Γ_1 (Γ_1 è regolare)

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \xrightarrow{\lambda \neq 0} \begin{cases} x = y \\ x^2 + x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

estremi di Γ_1

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \in D$$

$$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \notin D$$

$$\boxed{h(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}}, \quad \boxed{h(0, \pm 2) = \pm 2}$$

Γ_2) Moltiplicatori di Lagrange. Sia $g(x, y) = y^2 - x - 4 = 0$.

$\nabla g(x, y) = (-1, 2y) \neq (0, 0)$ in Γ_2 (Γ_2 è regolare)

$$\begin{cases} 1 = -\lambda \\ 1 = 2\lambda y \\ y^2 = x + 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ y = -1/2 \\ x = \frac{1}{4} - 4 = -\frac{15}{4} \end{cases}$$

$$\left(-\frac{15}{4}, -\frac{1}{2}\right) \in D$$

$$\boxed{h\left(-\frac{15}{4}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{4}}$$

Confrontando i valori si ha $h(D) = [-\frac{17}{4}, 2\sqrt{2}]$
e quindi applicando il valore assoluto si trova
che il valore massimo di f in D è $\frac{17}{4} (> 2\sqrt{2})$.

(b) Sia A un aperto non vuoto e limitato che
non interseca la retta $y = -x$.

Allora f è differenziabile in A e

$$\nabla f = (\pm 1, \pm 1) \neq (0, 0).$$

Quindi ogni punto di A è interno e non stazionario e dunque non può essere né di massimo né di minimo. Un esempio è

$$A = (0, 1) \times (0, 1).$$

Esercizio 2. Sia $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$ con $t \in [0, 2]$.

(a) Calcolare $\frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} (x^2 + z^2) ds$.

(b) Calcolare $\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle$ dove $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(z + \log(1+z), -\frac{1}{(2+y)^2}, \frac{x}{1+z} \right)$.

(a) $\vec{\gamma}'(t) = (-2\pi \sin(2\pi t), 2\pi \cos(2\pi t), 1)$ da cui

$$\|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{(2\pi)^2 + 1} \quad \text{e} \quad |\gamma| = \int_0^2 \|\vec{\gamma}'(t)\| dt = 2\sqrt{(2\pi)^2 + 1}.$$

Così

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\gamma|} \int_0^2 (x^2 + z^2) ds &= \frac{1}{|\gamma|} \int_0^2 ((\cos(2\pi t))^2 + t^2) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (\cos^2(2\pi t) + t^2) dt = \frac{1}{2} \left(1 + \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^2 \right) = \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

(b) Si nota che $\vec{F} = \nabla U + (z, 0, 0)$ con

$$U(x, y, z) = x \log(1+z) + \frac{1}{2+y}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle &= U(\vec{\gamma}(2)) - U(\vec{\gamma}(0)) + \int_{\gamma} \langle (z, 0, 0), d\vec{s} \rangle \\ &= U(1, 0, 2) - U(1, 0, 0) + \int_0^2 t \cdot (-2\pi \sin(2\pi t)) dt \\ &\stackrel{u=2\pi t}{=} \log(3) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} u \sin(u) du \quad (\text{per parti}) \\ &= \log(3) - \frac{1}{2\pi} \left[-u \cos(u) + \sin(u) \right]_0^{4\pi} = \log(3) + 2. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Sia $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, |x| + |y| \geq 1\}$.

(a) Determinare il piano tangente al bordo di D in $(1, 1, \sqrt{2})$ e il piano tangente al bordo di D in $(1/2, 1/2, 1)$.

(b) Calcolare $\iiint_D |z| dx dy dz$.

(a) Il punto $(1, 1, \sqrt{2})$ sta sulla superficie

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

e dunque il piano tangente è

$$\langle \nabla f(1, 1, \sqrt{2}), (x-1, y-1, z-\sqrt{2}) \rangle = 0 \Rightarrow x + y + \sqrt{2}z = 4.$$

$(2, 2, 2\sqrt{2})$

Il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ sta sulla superficie

$$f(x, y, z) = |x| + |y| = 1$$

e dunque il piano tangente è

$$\langle \nabla f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), (x-\frac{1}{2}, y-\frac{1}{2}, z-1) \rangle = 0 \Rightarrow x + y = 1.$$

$(1, 1, 0)$

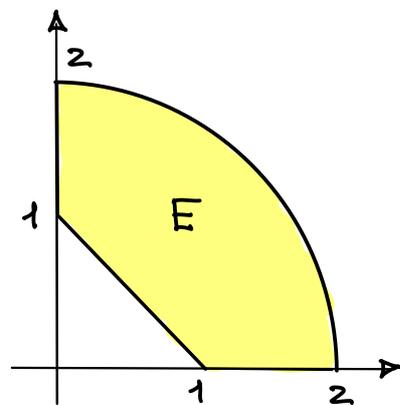
(b) Per simmetria

$$\iiint_D |z| dx dy dz = 8 \iiint_{E, z=0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z dz dx dy$$

$$= 4 \iint_E (4-x^2-y^2) dx dy$$

$$= 4 \iint_{\substack{\{x^2+y^2 \leq 4\} \\ x, y \geq 0}} (4-x^2-y^2) dx dy - 4 \iint_{\substack{\{x+y \leq 1\} \\ x, y \geq 0}} (4-x^2-y^2) dx dy$$

$$= 4 \int_{\rho=0}^2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} (4-\rho^2) \rho d\rho d\theta - 4 \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} (4-x^2-y^2) dx dy$$



$$= 2\pi \left[4\rho - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^2 - 4 \int_0^1 \left((4-x^2)(1-x) - \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx$$

$$= 2\pi(8-4) - 4 \int_0^1 \left((4-(1-s)^2)s - \frac{s^3}{3} \right) ds \quad (s=1-x)$$

$$= 8\pi - 4 \left[\frac{3s^2}{2} + \frac{2s^3}{3} - \frac{s^4}{3} \right]_0^1 = 8\pi - \frac{22}{3}.$$

$$\int_Y \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = \iint_A \langle (2z'', -3, -6), (2x, 1, 1) \rangle dx dy$$

$$= \iint_A (4x \underbrace{(1-x^2-y)}_{x\text{-disponi}} - 9) dx dy = -9|A|$$

← symmetrisch für $x=0$

$$= -9 \cdot 2 \int_0^1 (1-x^2) dx = -18 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = -12.$$