Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica
Soluzione della prova scritta del 14-7-2023

Esercizio 1. Si consideri il sistema: $\begin{cases} x^2+y^2 = 1+z^2 \\ x(y+z)+2 = -2yz \end{cases}$.

(a) Verificare che in un intorno del punto $(1,-1,1)$ il sistema definisce implicitamente due funzioni C^2: $y=\varphi(x)$ e $z=\psi(x)$.

(b) Determinare $\varphi'(1)$ e $\psi'(1)$.

(a) Il sistema dato è

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-1=0 \\ g(x,y,z) = xy+xz+2yz+2=0 \end{cases}$$

quindi

$$\begin{bmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & -2z \\ x+2z & x+2y \end{bmatrix} \overset{(1,-1,1)}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \overset{\det}{\Longrightarrow} 2+6=8\neq 0$$

e per il teorema delle funzioni implicite per sistemi $\exists\ y=\varphi(x)$ e $z=\psi(x)$ C^2 tali che $\varphi(1)=-1$, $\psi(1)=1$ e risolvono il sistema dato in un intorno di $x=1$.

(b) In un intorno di $x=1$ si ha che

$$\begin{cases} x^2+\varphi^2(x)-\psi^2(x)=1 \\ x\varphi(x)+x\psi(x)+2\varphi(x)\psi(x)=-2 \end{cases}$$

Derivando rispetto a x si ottiene

$$\begin{cases} \cancel{2}x+\cancel{2}\varphi\cdot\varphi'-\cancel{2}\psi\cdot\psi'=0 \\ \varphi+x\varphi'+\psi+x\psi'+2\varphi'\psi+2\varphi\psi'=0 \end{cases}$$

Sostituendo $x=1$ si ha

$$\begin{cases} 1-\varphi'-\psi'=0 \\ -\cancel{1}+\varphi'+\cancel{1}+\psi'+2\varphi'-2\psi'=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \varphi'+\psi'=1 \\ 3\varphi'-\psi'=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \varphi'(1)=\frac{1}{4} \\ \psi'(1)=\frac{3}{4} \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia γ la curva data dall'unione della semicirconferenza da $(1,0)$ a $(5,0)$ contenuta nel semipiano $y \leq 0$ e della semicirconferenza da $(5,0)$ a $(-3,0)$ contenuta nel semipiano $y \geq 0$.

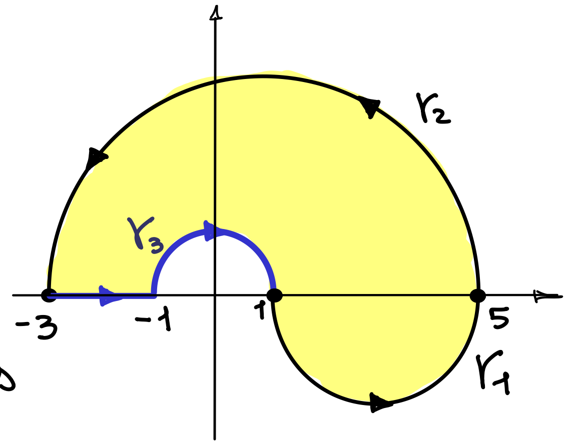
(a) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma (x+y)ds$.

(b) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s}\rangle$ dove $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \dfrac{3y}{x^2+y^2}, \dfrac{2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \dfrac{3x}{x^2+y^2}\right)$.

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ dove

$\vec{\gamma}_1 = (3+2\cos t, 2\sin t) \quad t \in [-\pi, 0]$

$\vec{\gamma}_2 = (1+4\cos t, 4\sin t) \quad t \in [0, \pi]$



$$(a) \int_\gamma (x+y)ds = \int_{\gamma_1}(x+y)ds + \int_{\gamma_2}(x+y)ds$$

$$= (\bar{x}_1 + \bar{y}_1)|\gamma_1| + (\bar{x}_2 + \bar{y}_2)|\gamma_2| = \left(3 - \frac{4}{\pi}\right)2\pi + \left(1 + \frac{8}{\pi}\right)\cdot 4\pi$$

$$= 10\pi + 24$$

ricordando che il baricentro della semicirconferenza $(x-x_0)^2+y^2=R^2,\ y \geq 0$ è $\left(x_0, \frac{2R}{\pi}\right)$.

(b) Notiamo che $\vec{F} = \vec{G} + 3\vec{H}$ dove

$\vec{G} = \nabla U$ con $U(x,y,z) = -\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad \vec{G}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

e

$\vec{H} = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ è irrotazionale ma non conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Così $\displaystyle\int_\gamma \langle \vec{G}, d\vec{s}\rangle = U(-3,0) - U(1,0) = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$

e $\displaystyle\int_\gamma \langle \vec{H}, d\vec{s}\rangle \overset{GG}{=} 0 - \int_{\gamma_3} \langle \vec{H}, d\vec{s}\rangle = -\int_{-3}^{-1} \underbrace{\langle (0,*), (1,0)\rangle}_{0} dt$

$$+ \int_0^\pi \langle (-\sin t, \cos t), (-\sin t, \cos t)\rangle dt = \pi.$$

Infine $\displaystyle\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = \int_\gamma \langle \vec{G}, d\vec{s}\rangle + 3\int_\gamma \langle \vec{H}, d\vec{s}\rangle = \frac{4}{3} + 3\pi.$

Esercizio 3. (a) Calcolare il volume di $D = \left\{(x,y,z) : 4x + 4y \le z, x^2 + y^2 + \frac{z}{2} \le 1\right\}$.

(b) Calcolare l'area di $S = \left\{(x,y,z) : 4x + 4y = z, x^2 + y^2 + \frac{z}{2} \le 1\right\}$.

(a) Notiamo che

$$\begin{cases} 4x+4y \le z \\ x^2+y^2+\frac{z}{2} \le 1 \end{cases} \iff 4x+4y \le z \le 2-2x^2-2y^2$$

$$\Rightarrow \cancel{4}^{2}x+\cancel{4}^{2}y \le \cancel{2}^{1}-\cancel{2}x^2-\cancel{2}y^2$$

$C: (x+1)^2+(y+1)^2 \le 3$ cerchio di centro $(-1,-1)$ e raggio $\sqrt{3}$

Così

$$|D| = \iint_C \left(\int_{z=4x+4y}^{2-2x^2-2y^2} dz \right) dx\,dy = 2\iint_C \left(3-(x+1)^2-(y+1)^2\right) dx\,dy$$

$$\begin{cases} x=-1+\rho\cos\theta \\ y=-1+\rho\sin\theta \end{cases} \overset{CP}{=} 2\int_{\rho=0}^{\sqrt{3}} \int_{\theta=0}^{2\pi} (3-\rho^2)\rho\,d\rho\,d\theta = 4\pi\left[3\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} = 9\pi.$$

(b) Parametrizzazione di S:

$$\vec{\sigma}(x,y) = (x,y,4x+4y) \quad \text{con } (x,y) \in C.$$

Allora

$$\|\sigma_x \times \sigma_y\| = \|(-4,-4,1)\| = \sqrt{16+16+1} = \sqrt{33}$$

e

$$|S| = \iint_S dS = \iint_C \|\sigma_x \times \sigma_y\|\,dx\,dy = \sqrt{33}\,|C| = \sqrt{33}\cdot 3\pi.$$

Esercizio 4. Sia $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \big(x^3 - y - z, x, 2\big)$ e siano le superfici

$$S_1 = \{(x,y,z) : z+1 = x^2+y^2, z+3y^2 \le 0\},$$
$$S_2 = \{(x,y,z) : z+1 \ge x^2+y^2, z+3y^2 = 0\}.$$

(a) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s}\rangle$ dove γ è la curva data da $S_1 \cap S_2$ percorsa in verso antiorario rispetto all'asse z.

(b) Calcolare $\displaystyle\iint_{S_1\cup S_2} \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S}\rangle$ dove S_1 è orientata in modo che $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}\rangle \le 0$ e S_2 è orientata in modo che $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}\rangle \ge 0$.

(a) La curva $\gamma = S_1 \cap S_2$ è sia il bordo di S_1 che il bordo di S_2. L'orientazione data di γ è compatibile con l'orientazione di S_1 e S_2 verso l'alto. Possiamo allora applicare il teorema del rotore. Lo facciamo rispetto a S_2.

y-disp

$-6y+2$

$$\int_\gamma \langle \vec F, d\vec s\rangle \overset{TR}{=} \iint_{S_2} \langle \mathrm{rot}(\vec F), d\vec S\rangle = \iint_A \langle (0,-1,2),(0,6y,1)\rangle\, dx\,dy$$

$A \leftarrow$ simm. per $y=0$

$$= \iint_A 2\,dx\,dy = 2|A| = 2\pi\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \pi$$

dove $\mathrm{rot}(\vec F) = \det\begin{bmatrix} \vec\imath & \vec\jmath & \vec k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^3-y-z & x & 2 \end{bmatrix} = (0,-1,2)$ e

$\vec\sigma(x,y) = (x,y,-3y^2) \implies \vec\sigma_x \times \vec\sigma_y = (0,6y,1)$ con

$$A = \{(x,y) : -3y^2 \ge x^2+y^2-1\} = \left\{(x,y) : x^2 + \frac{y^2}{1/4} \le 1\right\}.$$

(b) $S_1 \cup S_2$ è il bordo di

$$D = \{(x,y,z) : x^2+y^2-1 \le z \le -3y^2\}.$$

Le orientazioni date a S_1 e S_2 corrispondono all'orientazione di ∂D verso l'esterno.

$$\iint_{S_1\cup S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle \overset{TD}{=} \iiint_D \overset{3x}{\overset{\shortparallel}{\mathrm{div}}}(\vec{F})\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_A 3x^2\big(\overset{1-x^2-4y^2}{\overbrace{-3y^2-(x^2+y^2-1)}}\big)\,dx\,dy$$

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\frac{1}{2}\rho\sin\theta \end{cases} \quad \overset{CP}{=} \int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} 3\rho^2\cos^2\theta\,(1-\rho^2)\,\frac{\rho}{2}\,d\rho\,d\theta$$

$$= \frac{3\pi}{2}\int_0^1 (\rho^3-\rho^5)\,d\rho = \frac{3\pi}{2}\left[\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$