

Esercizio 1. Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(2^k + 1) + 1}{(k+1)(3x+1)^k}.$$

Consideriamo la serie di potenze $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ con

$$a_k = \frac{k(2^k + 1) + 1}{(k+1)}. \text{ Per } k \rightarrow \infty,$$

$$|a_k|^{1/k} = 2 \left(\frac{k(1 + \frac{1}{2^k}) + \frac{1}{2^k}}{(k+1)} \right)^{1/k} \sim 2 \frac{k^{1/k}}{(k+1)^{1/k}} \rightarrow 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}.$$

Agli estremi $z = \pm \frac{1}{2}$ la serie non converge perché

$$|a_k z^k| = \frac{k(1 + \frac{1}{2^k}) + \frac{1}{2^k}}{(k+1)} \rightarrow 1 \neq 0.$$

Quindi l'insieme di convergenza rispetto a z è
 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Allora rispetto a x otteniamo

$$\left| \frac{1}{3x+1} \right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 < |3x+1| \begin{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 < 3x+1 \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x \\ \rightarrow \begin{cases} 2 < -3x-1 \\ 3x+1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 > x \end{cases}$$

e quindi l'insieme di convergenza della serie è

$$(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, +\infty).$$

Esercizio 2. Sia $f(x, y) = e^{3x+2y}$.

(a) Determinare per quali $\alpha > 0$ il seguente limite esiste e nel caso calcolarlo:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - 1}{(x^2 + y^2)^\alpha}.$$

(b) Trovare il valore massimo e il valore minimo di f in

$$D = \{(x, y) : 3x^2 + 4y^2 \leq 4, x + 1 \geq y^2\}.$$

(a) Per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$,

$$\frac{e^{3x+2y} - 1}{(x^2 + y^2)^\alpha} = \left(\frac{e^{3x+2y} - 1}{3x+2y} \right) \cdot \frac{3x+2y}{(x^2 + y^2)^\alpha} \stackrel{CP}{\sim} \int^{1-2\alpha} (\underbrace{3\cos\theta + 2\sin\theta}_{\text{limitato}})$$

Così il limite esiste e vale 0 se $1-2\alpha > 0$ ossia per $\alpha < \frac{1}{2}$.

Per $\alpha \geq \frac{1}{2}$ il limite non esiste:

$$\text{Se } \alpha = \frac{1}{2} \text{ e } y=0 \text{ allora } \frac{e^{3x}-1}{|x|} \begin{cases} \rightarrow 3 & \text{per } x \rightarrow 0^+ \\ \rightarrow -3 & \text{per } x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$$\text{Se } \alpha > \frac{1}{2} \text{ e } y=0 \text{ allora } \frac{e^{3x}-1}{|x|^{2\alpha}} \begin{cases} \rightarrow +\infty & \text{per } x \rightarrow 0^+ \\ \rightarrow -\infty & \text{per } x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

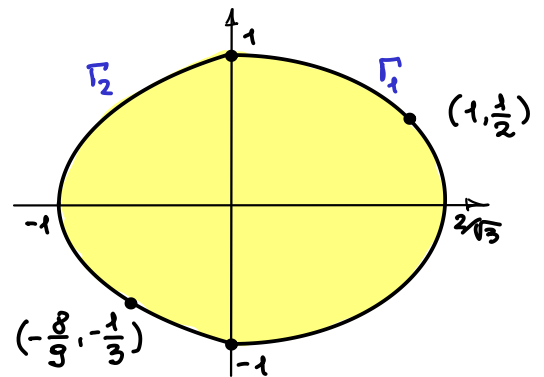
(b) Punti stazionari:

$$\nabla f(x, y) = e^{3x+2y} (3, 2) \neq (0, 0).$$

Studio lungo il bordo $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

$$\Gamma_1 = \{(x, y) : 3x^2 + 4y^2 = 4, x \geq 0\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) : x - y^2 = -1, x \leq 0\}$$



Moltiplicatori di Lagrange per Γ_1 (tutti punti regolari)

$$\begin{cases} e^{3x+2y} 3 = \lambda 6x \cdot 2 \\ e^{3x+2y} 2 = \lambda 8y \cdot 3 \end{cases} \rightarrow \lambda 12x = \lambda 24y \rightarrow y = \frac{x}{2}$$

$$(3x^2 + 4y^2 = 4 \rightarrow 3x^2 + 4\frac{x^2}{4} = 4 \rightarrow x = \pm 1 \quad (1, \frac{1}{2}) \in \Gamma_1$$

Moltiplicatori di Lagrange per Γ_2 (tutti punti regolari)

$$\begin{cases} e^{3x+2y} \cdot 3 = \lambda \cdot 1 \cdot 2 \rightarrow 2\lambda = -6\lambda y \rightarrow y = -\frac{1}{3} \\ e^{3x+2y} \cdot 2 = \lambda \cdot (-2y) \cdot 3 \\ x+1 = y^2 \rightarrow x+1 = \frac{1}{9} \rightarrow x = -\frac{8}{9} \end{cases} \quad \left(-\frac{8}{9}, -\frac{1}{3}\right) \in \Gamma_2$$

Dato che

$$f(0,1) = e^2, \quad f(0,-1) = e^{-2}, \quad f(1, \frac{1}{2}) = e^4, \quad f(-\frac{8}{9}, -\frac{1}{3}) = e^{-\frac{10}{3}}$$

si conclude

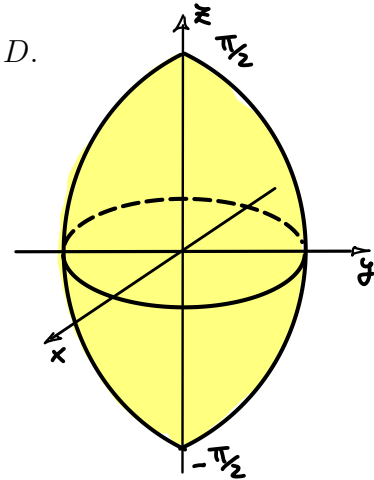
$$\max_D f(x,y) = e^4 \quad e \quad \min_D f(x,y) = e^{-\frac{10}{3}}.$$

Esercizio 3. Si consideri il solido

$$D = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq (\cos(z))^2, z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right\}.$$

(a) Calcolare $\iiint_D |\sin(z)| dx dy dz$.

(b) Calcolare $\iint_S |\sin(z)| dS$ dove la superficie S è il bordo di D .



(a) $\iiint_D |\sin(z)| dx dy dz$

z-poi' (point)
D ← simmetrico rispetto a z=0

$$= 2 \int_{z=0}^{\pi/2} \sin z \left(\iint_{S_z} 1 dx dy \right) dz$$

$S_z = \{ x^2 + y^2 \leq \cos^2 z \}$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \sin(z) \pi \cos^2(z) dz = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2(z) \sin(z) dz = 2\pi \left[-\frac{\cos^3(z)}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{2\pi}{3}.$$

(b) Parametrizzazione di S :

$$\vec{\sigma}(\theta, z) = (\cos z \cos \theta, \cos z \sin \theta, z)$$

con

$$A = \left\{ (\theta, z) : \theta \in [0, 2\pi], z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right\}.$$

Allora

$$\vec{\sigma}_\theta \times \vec{\sigma}_z = (-\cos z \sin \theta, \cos z \cos \theta, 0) \times (-\sin z \cos \theta, -\sin z \sin \theta, 1)$$

$$= (\cos z \cos \theta, \cos z \sin \theta, \sin z \cos z)$$

da cui $\|\vec{\sigma}_\theta \times \vec{\sigma}_z\| = \cos z \cdot \sqrt{1 + \sin^2 z}$. Quindi

$$\iint_S |\sin(z)| dS = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin z \cdot \cos z \cdot \underbrace{\sqrt{1 + \sin^2 z}}_u dz d\theta$$

$du = 2 \sin z \cos z dz$

$$= 2\pi \int_1^2 \sqrt{u} du = 2\pi \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_1^2 = \frac{4\pi}{3} (\sqrt{8} - 1).$$

Esercizio 4. Sia $\mathbf{F}(x, y, z) = (5x + z, -2yz, xz)$.

(a) Calcolare $\iint_{S_1} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ dove S_1 è il bordo di

$$D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq \sqrt{y} \leq 1, z \in [0, 3]\}$$

orientato verso l'esterno.

(b) Calcolare $\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle$ dove γ è la curva data dal bordo di

$$S_2 = \{(x, y, z) : 0 \leq x = \sqrt{y} \leq 1, z \in [0, 3]\}$$

percorsa nel verso antiorario rispetto all'asse x .

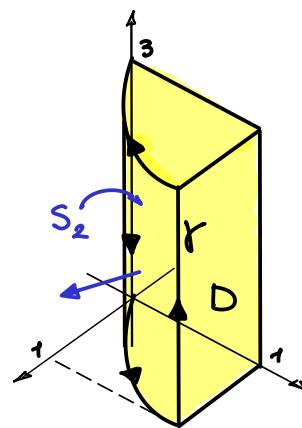
(a) Per il teorema della divergenza

$$\iint_{S_1} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle \stackrel{\text{TD}}{=} \iiint_D \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx dy dz$$

$$= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=x^2}^1 \left(\int_{z=0}^3 (5-2z+x) dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=x^2}^1 (15-9+3x) dy \right) dx = \int_{x=0}^1 (6+3x)(1-x^2) dx$$

$$= \left[6x + 3\frac{x^2}{2} - 2x^3 - \frac{3x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{19}{4}.$$



(b) Per il teorema del rotore $\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle \stackrel{\text{TR}}{=} \iint_{S_2} \langle \operatorname{rot}(\mathbf{F}), d\mathbf{S} \rangle$.

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 5x+z & -2yz & xz \end{bmatrix} = (2y, 1-z, 0)$$

Parametrizzazione di S_2 :

$$\vec{\sigma}(x, z) = (x, x^2, z) \text{ con } (x, z) \in [0, 1] \times [0, 3].$$

Allora

$$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_z = (1, 2x, 0) \times (0, 0, 1) = (2x, -1, 0) \quad \text{orientazione data}$$

Infine

$$\int_r \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle \stackrel{\text{TR}}{=} \iint_{[0,1] \times [0,3]} \langle (2y, 1-z, 0), (2x, -1, 0) \rangle dx dz$$

$4xy - 1 + z = 4x^3 - 1 + z$

$$= \int_{x=0}^1 (4x^3 - 1) \cdot 3 + \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^3 dx = 3 \left[x^4 - x \right]_0^1 + \frac{9}{2} = \frac{9}{2}.$$