Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica
Soluzione della prova scritta del 17-2-2023

Esercizio 1. (a) Per ogni $\alpha > 0$, determinare il raggio di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!\,k^{\alpha k}}{(2k+1)!} \cdot \frac{(x+2)^k}{\sqrt{k^2+4^k}}.$$

(b) Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-\pi^2)^k}{(2k+1)!\,16^k}$.

(a) Sia $a_k = \dfrac{k!\,k^{\alpha k}}{(2k+1)!\sqrt{k^2+4^k}}$ allora per $k \to \infty$

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\overset{k+1}{\cancel{(k+1)!}}\,(k+1)^{\alpha(k+1)}}{\underbrace{\cancel{(2k+3)!}}_{(2k+3)(2k+2)}\underbrace{\sqrt{(k+1)^2+4^{k+1}}}_{\sim\sqrt{4^{k+1}}=2^{k+1}}} \cdot \frac{\cancel{(2k+1)!}\overbrace{\sqrt{k^2+4^k}}^{\sim\sqrt{4^k}=2^k}}{\cancel{k!}\,k^{\alpha k}}$$

$$\sim \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\alpha k}\cdot(k+1)^{\alpha+1}}{2(2k+3)(2k+2)} \sim \frac{e^{\alpha}\cdot k^{\alpha-1}}{2^3} \to \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>1 \\ e/8 & \text{se } \alpha=1 \\ 0 & \text{se } 0<\alpha<1 \end{cases}$$

Così il raggio di convergenza R è $\begin{cases} 0 & \text{se } \alpha>1 \\ 8/e & \text{se } \alpha=1 \\ +\infty & \text{se } 0<\alpha<1 \end{cases}$

(b) Ricordiamo che $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad e \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Sia $x = \pi/4$ allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-\pi^2)^k}{(2k+1)!\,16^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overset{\frac{2k+1-1}{2}}{\overset{\shortparallel}{k}}(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$$

$$= \frac{1}{2}(\cos(x)-1) - \frac{1}{2x}(\operatorname{sen}(x)-x)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos(x) - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{\pi}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\left(1-\frac{4}{\pi}\right).$$

Esercizio 2. (a) Determinare se i seguenti limiti esistono e nel caso calcolarli:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{2x^2+xy+2y^2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{2x^2+5xy+2y^2}.$$

(b) Per ogni $b \in \mathbb{R}$, determinare le rette t e s tangenti rispettivamente nel punto $(2,0)$ e nel punto $(0,2)$ alla curva di livello

$$\frac{x^4+y^4}{2x^2+bxy+2y^2} = 2.$$

Per quali valori di b le rette t e s sono parallele?

(a) Il primo limite esiste e vale 0: se $(x,y)\to(0,0)$

$$0 \le \left|\frac{x^4+y^4}{2x^2+xy+2y^2}\right| \overset{CP}{=} \frac{\rho^{\cancel{4}\,2}(\overbrace{\cos^4\theta+\sin^4\theta}^{\le 1+1})}{\cancel{\rho^2}\,|2+\underbrace{\cos\theta\sin\theta}_{|\cdot| \le 1}|} \le 2\rho^2 \to 0$$

$2+\cos\theta\sin\theta \ge 2-1 = 1$

Il secondo limite non esiste.
In questo caso il denominatore si fattorizza:

$$2x^2+5xy+2y^2 = (2x+y)(x+2y) \qquad \frac{x}{y} = \frac{-5\pm\sqrt{5^2-16}}{4} <^{-1/2}_{-2}$$

Allora se poniamo $y=-2x+x^\alpha$ con $\alpha>1$ e $x\to 0^+$ si ha che $(x,y)\to(0,0)$ e

$$\frac{x^4+y^4}{(2x+y)(x+2y)} = \frac{x^4+(-2x+x^\alpha)^4}{(x^\alpha)(x+2(-2x+x^\alpha))} \sim \frac{x^4+16x^4}{x^\alpha(-3x)}$$

$$\sim -\frac{17}{3}x^{3-\alpha} \begin{cases} \to -\infty & \text{se } \alpha>3 \\ \to -17/3 & \text{se } \alpha=3 \\ \to 0 & \text{se } 1<\alpha<3 \end{cases}$$

Dato che si ottengono valori diversi, per l'unicità del limite, il limite dato non esiste.

(b) La curva di livello si può riscrivere come

$$g(x,y) = x^4+y^4-4x^2-2bxy-4y^2=0$$

da cui

$$g_x(x,y) = 4x^3-8x-2by, \quad g_y(x,y) = 4y^3-2bx-8y.$$

Allora la retta t tangente in $(2,0)$ è

$$0 = g_x(2,0)(x-2) + g_y(2,0)y = 16(x-2) - 4by = 0 \Rightarrow 4x - by = 8$$

e la retta s tangente in $(0,2)$ è

$$0 = g_x(0,2)x + g_y(0,2)(y-2) = -4bx + 16(y-2) = 0 \Rightarrow -bx + 4y = 8$$

$$t /\!/ s \Leftrightarrow (4,-b) /\!/ (-b,4) \Leftrightarrow \det\begin{bmatrix} 4 & -b \\ -b & 4 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow b^2 = 16 \Leftrightarrow b = \pm 4.$$

Esercizio 3. Si consideri la superficie

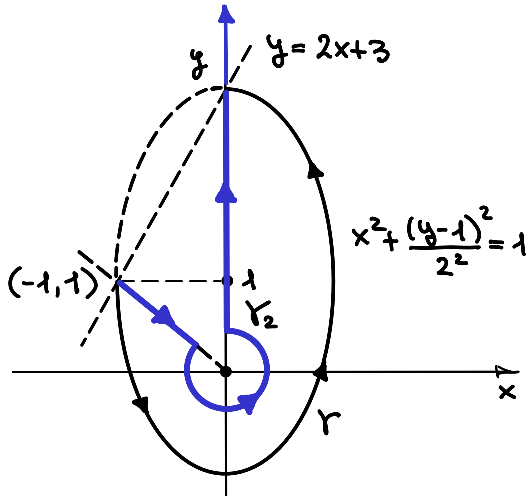
$$S = \{(x,y,z) : 4x^2 + (y-1)^2 = 4, y \le 2x+3, 0 \le z \le x^2 + (y-1)^2\}.$$

S è orientata in modo che il versore normale in $(0,3,0)$ sia $\boldsymbol{n} = (0,1,0)$.

(a) Calcolare $\iint_S \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S} \rangle$ dove $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (1,0,z)$.

(b) Calcolare $\int_\gamma \langle \boldsymbol{G}, d\boldsymbol{s} \rangle$ dove $\boldsymbol{G}(x,y,z) = \left(\frac{2x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+2y}{x^2+y^2}, 2z \right)$ e γ è la curva data dalla parte del bordo di S contenuta nel piano $z=0$ e percorsa nel verso indotto dall'orientazione di S.

La superficie S è data dal cilindro ellittico "cavo" $x^2 + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$ tagliato dal piano verticale $y = 2x+3$ dal piano $z=0$ e il paraboloide $z = x^2 + (y-1)^2 \ge 0$.



(a) Parametrizzazione di S:

$$\vec{\sigma}(\theta, z) = (\cos\theta, 1 + 2\sin\theta, z)$$

con

$$A = \left\{ (\theta, z) : \theta \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right], z \in [0, \overbrace{\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}^{x^2+(y-1)^2}] \right\}.$$

Allora

$$\vec{\sigma_\theta} \times \vec{\sigma_z} = (-\sin\theta, 2\cos\theta, 0) \times (0,0,1) = (2\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

compatibile con l'orientazione data

Così

$$\iint_S < \vec{F}, d\vec{S} > = \int_{-\pi}^{\pi/2} \int_0^{\cos^2\theta + 4\sin^2\theta = 1 + 3\sin^2\theta} < (1,0,z), (2\cos\theta, \sin\theta, 0) > d\theta dz$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi/2} 2\cos\theta (1 + 3\sin^2\theta) d\theta$$

$$= 2 \Big[\sin\theta + \sin^3\theta \Big]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = 4.$$

(b) $\vec{G} = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}, z\right) + \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$

conservativo in $\mathbb{R}^3 \setminus$ asse z   irrotazionale in $\mathbb{R}^3 \setminus$ asse z

con $U = \log(x^2+y^2) + \frac{z^2}{2}$

Inoltre γ è una curva NON chiusa da $(-1,1,0)$ a $(0,3,0)$ omotopa in $\mathbb{R}^3 \setminus$ asse z a γ_2 (vedi figura) è costituita da due segmenti radiali e un arco di circonferenza di raggio $r>0$ sufficientemente piccolo. Allora

$$\int_\gamma \langle \vec{G}, d\vec{s} \rangle = U(0,3,0) - U(-1,1,0) + \int_{\gamma_2} \left\langle \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right), d\vec{s} \right\rangle$$

$$= \log(9) - \log(2) + 0 + \int_{-\pi-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{r^2}\, d\theta}{\cancel{r^2}}$$

$$= \log\left(\frac{9}{2}\right) + \frac{7\pi}{4}.$$

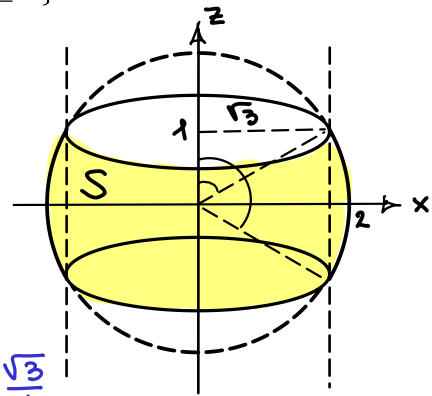
Esercizio 4. (a) Calcolare $\displaystyle\iint_S \frac{|z|}{x^2+y^2+(z-2)^2}\,dS$ dove

$$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 4,\, x^2+y^2 \geq 3\}.$$

(b) Calcolare il flusso di $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \big(x, yz^2, xy\big)$ attraverso il bordo di

$$D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 4,\, x^2+y^2 \geq 3\}$$

orientato verso l'interno.



(a) Parametrizzazione di S in coordinate sferiche:

$$\vec{\sigma}(\theta,\varphi) = (2\cos\theta\,\mathrm{sen}\varphi,\, 2\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi,\, 2\cos\varphi)$$

con $(\theta,\varphi) \in A = [0,2\pi]\times\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ $\quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{1}$

$$\iint_S \frac{|z|}{x^2+y^2+(z-2)^2}\,dS = \iint_A \frac{2|\cos\varphi|}{8-8\cos\varphi}(4\,\mathrm{sen}\varphi)\,d\varphi\,d\theta$$

$x^2+y^2+z^2-4z+4$

$u = 1-\cos\varphi$

$$= 2\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{|\cos\varphi|\,\mathrm{sen}\varphi}{1-\cos\varphi}\,d\varphi = 2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{|1-u|}{u}\,du$$

$$= 2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{u}-1\right)du + 2\pi\int_{1}^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{u}\right)du$$

$$= 2\pi\Big[\log u - u\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} + 2\pi\Big[u - \log u\Big]_{1}^{\frac{3}{2}} = 2\pi\log\left(\frac{4}{3}\right).$$

(b) Per il teorema della divergenza

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle = -\iiint_D \mathrm{div}(\vec{F})\,dx\,dy\,dz$$

$$\overset{cc}{=} -\int_{z=-1}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=\sqrt{3}}^{\sqrt{4-z^2}} (1+z^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz = -\cancel{2}\pi\int_{-1}^{1}(1+z^2)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(4-z^2-3)\,dz$$

$$= -\pi\int_{-1}^{1}(1-z^4)\,dz = -2\pi\left[z-\frac{z^5}{5}\right]_0^1 = -\frac{8\pi}{5}.$$