

Esercizio 1. Sia $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 2x^2y - 4$.

- (a) Individuare i punti stazionari di f stabilendo per ciascuno di essi se si tratta di un punto di massimo relativo, di minimo relativo o di sella. Ci sono punti di massimo/minimo assoluto?
(b) Determinare il valore massimo e il valore minimo di f in

$$D = \{(x, y) : 4x^2 + y^2 \leq 4, 2x^2 + y \geq 2\}.$$

- (c) Trovare un esempio di insieme non limitato $A \subset \mathbb{R}^2$ tale che la funzione f è limitata in A .

$$(a) \nabla f(x, y) = (8x + 4xy, 2y + 2x^2) \quad H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 8+4y & 4x \\ 4x & 2 \end{bmatrix}$$

Punti stazionari:

$$\begin{cases} 8x + 4xy = 0 \\ 2y + 2x^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x(2+y) = 0 \\ x=0 \quad \cup \quad \begin{cases} y = -2 \\ -4 + 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$(0, 0) \quad (\sqrt{2}, -2), (-\sqrt{2}, -2)$

Quindi

$$H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{autovale } > 0} (0, 0) \text{ è un punto di MINIMO RELATIVO}$$

$$H_f(\pm\sqrt{2}, -2) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 4\sqrt{2} \\ \pm 4\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\det(H) < 0} (\sqrt{2}, -2) \text{ e } (-\sqrt{2}, -2) \text{ sono punti di SELLA}$$

Non ci sono punti di MAX/MIN ASSOLUTO perché

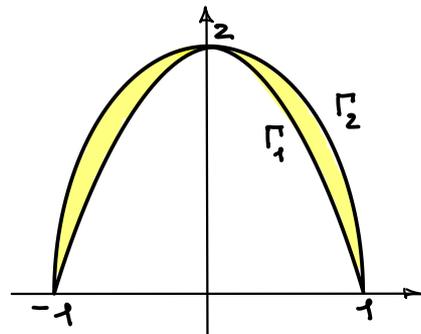
$$f(x, x) = 4x^2 + x^2 + 2x^3 - 4 \rightarrow \pm \infty \text{ per } x \rightarrow \pm \infty.$$

- (b) D è un insieme compatto e nessuno dei punti stazionari determinati in (a) è interno a D .

Quindi la funzione continua f assume il valore massimo e il valore minimo sul bordo $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

$$\Gamma_1 = \{(x, y) : 2x^2 + y = 2 \text{ e } x \in [-1, 1]\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) : 4x^2 + y^2 = 4 \text{ e } x \in [-1, 1]\}$$



Γ_1) Posto $y = 2 - 2x^2$ si ha che

$$f(x, 2 - 2x^2) = 4x^2 + 4(1 - x^2)^2 + 4x^2(1 - x^2) - 4$$

$$= \cancel{4x^2} + \cancel{4} - \cancel{8x^2} + \cancel{4x^4} + \cancel{4x^2} - \cancel{4x^4} - \cancel{4} = 0 \text{ costante}$$

$$\boxed{f(x, y) = 0} \quad \forall (x, y) \in \Gamma_1$$

Γ_2) Moltiplicatori di Lagrange. Sia $g(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$.

$\nabla g(x,y) = (8x, 2y) \neq (0,0)$ in Γ_2 (Γ_2 è regolare).

$$\begin{cases} 8x + 4xy = \lambda 8x \rightarrow 4x(2+y-2\lambda) = 0 \\ 2y + 2x^2 = \lambda 2y \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ x=0 & 2\lambda = 2+y \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ \dots \\ 0 + y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2 \end{cases} \cup \begin{cases} 2\lambda = 2+y \\ 2y + 2x^2 = (2+y)y = 2y + y^2 \rightarrow y^2 = 2x^2 = \frac{4}{3} \\ 4x^2 + y^2 = 4 \rightarrow 4x^2 + 2x^2 = 4 \rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$(0,2)$ ← già in Γ_1 $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$

$f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8}{3\sqrt{3}}$

Confrontando i valori trovati si ha che il valore massimo di f in D è $\frac{8}{3\sqrt{3}}$ e quello minimo è 0.

(c) Da quanto visto in (b) f è identicamente 0 sulla parabola $y = 2 - 2x^2$. Quindi f è limitata nell'insieme non limitato $A = \{(x, 2 - 2x^2) : x \in \mathbb{R}\}$.

Esercizio 2. Si consideri il solido

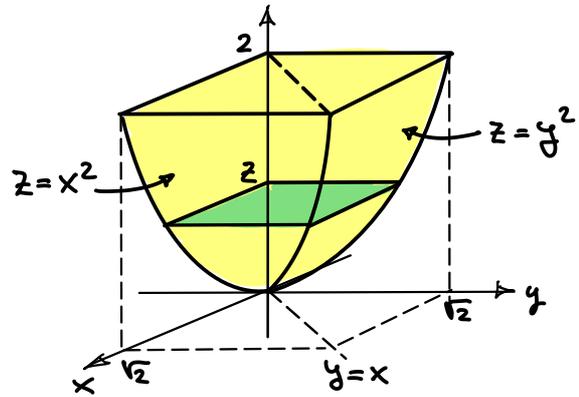
$$D = \{(x, y, z) : x^2 \leq z \leq 2, y^2 \leq z \leq 2\}.$$

(a) Calcolare l'integrale

$$\frac{1}{|D|} \iiint_D (x^2 + z^2) dx dy dz.$$

(b) Calcolare l'area totale della superficie data dal bordo di D .

Il solido D è formato da 4 parti simmetriche (in figura la parte nel primo ottante).
 Le sezione orizzontale S_z ad altezza $z \in [0, 2]$ è il quadrato $[-\sqrt{z}, \sqrt{z}] \times [-\sqrt{z}, \sqrt{z}]$



$$(a) |D| = \int_0^2 |S_z| dz = \int_0^2 (2\sqrt{z})^2 dz = 4 \int_0^2 z dz = 4 \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^2 = 8.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \iiint_D (x^2 + z^2) dx dy dz &= \int_{z=0}^2 \left(\iint_{S_z} (x^2 + z^2) dx dy \right) dz \\ &= \int_{z=0}^2 \left(\int_{x=-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} x^2 \cdot 2\sqrt{z} dx \right) dz + \int_0^2 z^2 |S_z| dz \\ &= \int_0^2 2\sqrt{z} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} dz + \int_0^2 z^2 \cdot 4z dz = \frac{4}{3} \int_0^2 z^2 dz + 4 \int_0^2 z^3 dz \\ &= \frac{4}{3} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^2 + 4 \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^2 = \frac{32}{9} + 16. \end{aligned}$$

Così

$$\frac{1}{|D|} \iiint_D (x^2 + z^2) dx dy dz = \frac{1}{8} \left(\frac{32}{9} + 16 \right) = \frac{4}{9} + 2 = \frac{22}{9}.$$

(b) Il bordo di D è formato dal quadrato nel piano $z=2$ e una superficie laterale formata da 8 parti di area uguale.

Una di queste parti è parametrizzata da

$$\vec{\sigma}(x,y) = (x, y, x^2) \text{ con } A = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x \leq \sqrt{2}\}$$

Allora $\|\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y\| = \|(-2x, 0, 1)\| = \sqrt{1+4x^2}$ e

$$\begin{aligned} |\partial D| &= 8 \int_{x=0}^{\sqrt{2}} \int_{y=0}^x \sqrt{1+4x^2} \, dx \, dy + (2\sqrt{2})^2 \\ &= 8 \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1+4x^2} \, dx + 8 = 8 \left[\frac{(1+4x^2)^{3/2}}{\frac{3}{2} \cdot 8} \right]_0^{\sqrt{2}} + 8 \\ &= \frac{2}{3}(27-1) + 8 = \frac{76}{3}. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Sia $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(2x - \frac{y}{z^2}, 4xy, -6z\right)$.

(a) Calcolare $\iint_{S_1} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ dove $S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, e^{-2} \leq z \leq e^{-1}\}$.

La superficie S_1 è orientata in modo che il versore normale in $(1, 0, e^{-1})$ sia $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$.

(b) Calcolare $\iint_{S_2} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ dove $S_2 = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, z = e^{-x^2 - y^2}\}$.

La superficie S_2 è orientata in modo che $\langle \mathbf{n}, \mathbf{k} \rangle \geq 0$ in ogni suo punto.

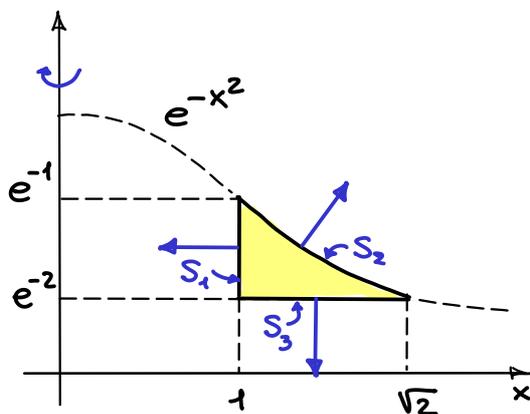
(a) Parametrizzazione di S_1

$$\vec{\sigma}(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$$

$$\text{con } A = [0, 2\pi] \times [e^{-2}, e^{-1}]$$

$$\vec{\sigma}_\theta \times \vec{\sigma}_z = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

↑ orientazione opposta



$$\iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = - \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} \int_0^{2\pi} \langle (2\cos\theta - \frac{\sin\theta}{z}, 4\sin\theta\cos\theta, *), (\cos\theta, \sin\theta, 0) \rangle d\theta dz$$

$$= - \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} \int_0^{2\pi} (2\cos^2\theta - \frac{\sin\theta\cos\theta}{z} + 4\sin^2\theta\cos\theta) d\theta dz$$

$$\int_0^{2\pi} \cdot d\theta = 0$$

$$= -2\pi \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} dz = -2\pi(e^{-1} - e^{-2}).$$

(b) In alternativa al calcolo diretto applichiamo il teorema della divergenza al dominio D

$$D = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, e^{-2} \leq z \leq e^{-x^2 - y^2}\}$$

dove $\partial D = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ orientato verso l'esterno

con $S_3 = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, z = e^{-2}\}$. Quindi:

$$\iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iiint_D \text{div}(\vec{F}) dx dy dz - \iint_{S_1 \cup S_3} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

$$= (8\pi e^{-2} - 4\pi e^{-1}) - (-2\pi(e^{-1} - e^{-2}) + 6\pi e^{-2}) = -2\pi e^{-1}$$

dove

$$\iint_{S_3} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_{\{1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}} \langle (*, *, -6z), (0, 0, -1) \rangle dx dy = 6\pi e^{-2}$$

e

$-4 + 4x^2$ x dispaui

$$\iiint \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz \stackrel{CC}{=} -4 \int_{\rho=1}^{\sqrt{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=e^{-2}}^{\infty} \rho d\theta d\rho dz$$

D ← simmetrico per x=0

$$= -4 \cdot 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} (e^{-\rho^2} - e^{-2}) \rho d\rho = -\frac{4}{2} \pi \left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2} - e^{-2} \frac{\rho^2}{2} \right]_1^{\sqrt{2}}$$
$$= 4\pi (e^{-2} - e^{-1} + e^{-2}(2-1)) = 8\pi e^{-2} - 4\pi e^{-1}$$

Esercizio 4. Siano $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\log(z), xy^2, \frac{x}{z}\right)$ e

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 8 - x^2 - y^2, z \geq x^2 + 3y^2\}.$$

La superficie S è orientata in modo che $\langle \mathbf{n}, \mathbf{k} \rangle \geq 0$ in ogni suo punto.

(a) Calcolare $\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle$ dove γ è la curva data dal bordo di S percorsa nel verso indotto dall'orientazione di S .

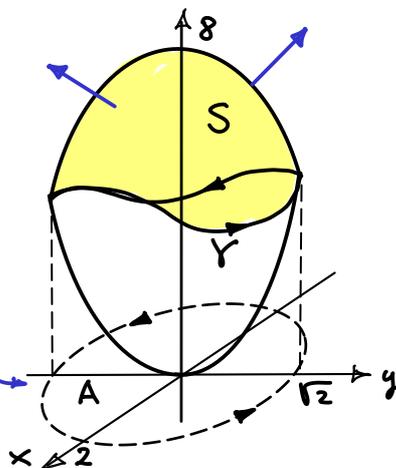
(b) Verificare il calcolo diretto svolto in (a) applicando il teorema del rotore.

Notiamo che $\mathbf{F} = \underbrace{(0, xy^2, 0)}_{\vec{G}} + \nabla(x \log(z))$
 quindi basta fare il calcolo per il campo \vec{G} .
campo conservativo

(a) Parametrizzazione di γ .

γ è dato dal sistema

$$\begin{cases} z = 8 - x^2 - y^2 \\ z = x^2 + 3y^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8 - x^2 - y^2 = x^2 + 3y^2 \\ 2x^2 + 4y^2 = 8 \\ \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 \text{ ellisse} \end{cases}$$



Coni

$$\vec{\gamma}(t) = (2\cos t, \sqrt{2}\sin t, 8 - (2\cos t)^2 - (\sqrt{2}\sin t)^2) \text{ con } t \in [0, 2\pi]$$

e dunque

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle \underbrace{(0, xy^2, 0)}_{\vec{G}}, (*, (\sqrt{2}\sin t)', *) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} 4\sqrt{2} \cos^2 t \sin^2 t dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt \stackrel{s=2t}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{4\pi} \sin^2(s) ds = \sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

(b) Parametrizzazione di S :

$$\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, 8 - x^2 - y^2) \text{ con } A = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} \leq 1 \right\}$$

e quindi $\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = (2x, 2y, 1)$ verso l'alto.

$$\text{rot}(\vec{F}) = \text{rot}(\vec{G}) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & xy^2 & 0 \end{bmatrix} = (0, 0, y^2).$$

Allora per il teorema del rotore

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = \iint_A \langle (0, 0, y^2), (2x, 2y, 1) \rangle dx dy$$

$$= \iint_A y^2 dx dy = \iint (\sqrt{2}Y)^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} dX dY$$

$$\begin{cases} x=2X \\ y=\sqrt{2}Y \end{cases} \{x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$\stackrel{CP}{=} \int_{\rho=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} 4\sqrt{2} \rho^2 \sin^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= 4\sqrt{2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \cdot \pi = \sqrt{2} \pi.$$