Esercizio 1.

(a) Per quali $x > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4k+x}{4k+3}\right)^{k^2}$ è convergente?

(b) Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+2}-3}{(k+1)!}$.

(a) Per $x>0$ la serie è a termini positivi.

Applicando il criterio della radice:

$$\sqrt[k]{a_k} = \left(\frac{4k+x}{4k+3}\right)^k = \frac{\left(1+\frac{x/4}{k}\right)^k}{\left(1+\frac{3/4}{k}\right)^k} \longrightarrow \frac{e^{x/4}}{e^{3/4}} = e^{\frac{x-3}{4}} \begin{cases} >1 & \text{per } x>3 \\ =1 & \text{per } x=3 \\ <1 & \text{per } x<3 \end{cases}$$

Quindi per $x \neq 3$ la serie converge se e solo se $x<3$.

Per $x=3$ si ha che $a_k = 1 \not\to 0$ e dunque la serie non converge. Si conclude che la serie converge se e solo se

$$\boxed{x<3}$$

(b) Ricordando che $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+2}-3}{(k+1)!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k+1}-3}{k!} = 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{k!} - 3\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$= 2\left(e^2 - 1 - \frac{2^1}{1!}\right) - 3\left(e - 1 - \frac{1^1}{1!}\right)$$

$$= 2e^2 - \cancel{6} - 3e + \cancel{6} = \boxed{2e^2 - 3e}$$

Esercizio 2. Sia $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{3}\,x + y - 1}{x^2+y^2+2}$.

(a) Determinare la retta tangente alla curva di livello $f(x,y) = -\frac{1}{2}$ nel punto $(0,0)$.

(b) Determinare il valore massimo e il valore minimo di f in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 4\}$.

(a) La curva di livello $f = -\frac{1}{2}$ è data da

$$\frac{\sqrt{3}x+y-1}{x^2+y^2+2} = -\frac{1}{2} \iff \underbrace{x^2+y^2+2+2\sqrt{3}x+2y-\cancel{2}+\cancel{2}}_{=g(x,y)} = 0$$

Quindi $\nabla g(0,0) = (2x+2\sqrt{3}, 2y+2)\big|_{(0,0)} = (2\sqrt{3}, 2) \neq (0,0)$

Così $(0,0)$ è un punto regolare e la retta tangente è

$$\overset{2\sqrt{3}}{g_x(0,0)}\cdot(x-0) + \overset{2}{g_y(0,0)}\cdot(y-0) = 0 \iff \boxed{y = -\sqrt{3}x}$$

(b) Osserviamo che

$$\nabla f(x,y) = \frac{\left(\sqrt{3}(x^2+y^2+2) - (\sqrt{3}x+y-1)2x,\ (x^2+y^2+2) - (\sqrt{3}x+y-1)2y\right)}{\underbrace{(x^2+y^2+2)^2}_{\neq 0}}$$

Punti stazionari:

$$\begin{cases} \sqrt{3}(x^2+y^2+2) = (\sqrt{3}x+y-1)2x \\ (x^2+y^2+2) = (\sqrt{3}x+y-1)2y \end{cases} \rightarrow 2\underbrace{(\sqrt{3}x+y-1)}_{\neq 0}\underbrace{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-y\right)}_{x=\sqrt{3}y} = 0$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}y \\ (\sqrt{3}y)^2+y^2+2 = (3y+y-1)2y \end{cases} \rightarrow 6y^2+2y^2-2y-3y^2-y^2-2=0$$

$$2(2y^2-y-1)=0 \;\; \begin{cases} y=1 \\ y=-1/2 \end{cases}$$

I punti stazionari sono

$\boxed{(\sqrt{3},1)}$ e $\boxed{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$ entrambi nel compatto D.

Studio lungo il bordo $\partial D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4\}$:

se $(x,y)\in\partial D$ allora

$$f(x,y) = h(\theta) = \frac{\sqrt{3}(2\cos\theta) + (2\sin\theta) - 1}{4+2} \quad \text{con } \theta \in [0,2\pi]$$

e

$$h'(\theta) = \frac{1}{3}\left(-\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta\right)$$

0 $++$ $\frac{\pi}{6}$ $----$ $\frac{7\pi}{6}$ $++$ 2π

$\frac{\pi}{6} \to \boxed{(\sqrt{3},1)}$ $\qquad$ $\frac{7\pi}{6} \to \boxed{(-\sqrt{3},-1)}$

Confrontando i valori si trova che

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = \boxed{f(\sqrt{3},1) = \frac{1}{2}} \qquad \min_{(x,y)\in D} f(x,y) = \boxed{f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -1}$$

Esercizio 3. Calcolare la coordinata z del baricentro dei seguenti due insiemi.

(a) $\gamma = \{(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\,t) \in \mathbb{R}^3 : t \in [0,1]\}$.

(b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4,\ x^2+y^2 \le 2x,\ z \ge 0\}$.

(a) $\vec{r}\,'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}) \Rightarrow \|\vec{r}\,'(t)\| = (e^{2t} + e^{-2t} + 2)^{1/2} = e^t + e^{-t}$

$$|\gamma| = \int_\gamma ds = \int_0^1 \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_0^1 (e^t + e^{-t})\,dt = \left[e^t - e^{-t}\right]_0^1 = e - e^{-1}.$$

Quindi la coordinata z del baricentro di γ è

$$\bar{z} = \frac{1}{|\gamma|}\int_\gamma z\,ds = \frac{1}{e-e^{-1}}\int_0^1 \sqrt{2}\,t\,(e^t + e^{-t})\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{e-e^{-1}}\left[e^t(t-1) - e^{-t}(t+1)\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}(1-e^{-1})}{e-e^{-1}} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{e+1}}$$

(b) S ammette una parametrizzazione cartesiana:

$$\vec{\sigma}(x,y) = (x, y, \sqrt{4-x^2-y^2}), \quad A = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 2x\}$$

$(x-1)^2 + y^2 \le 1$

$$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1\right) \Rightarrow \|\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y\| = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$|S| = \iint_S dS = \iint_A \|\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y\|\,dx\,dy =$$

$$\overset{CP}{=} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\rho=0}^{2\cos\theta} \frac{2}{\sqrt{4-\rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \left[-\sqrt{4-\rho^2}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} (2 - 2\sin\theta)\,d\theta = 8\left[\theta + \cos\theta\right]_0^{\pi/2} = 4\pi - 8.$$

Quindi la coordinata z del baricentro di S è

$$\bar{z} = \frac{1}{|S|}\iint_S z\,dS = \frac{1}{4\pi-8}\iint_A \cancel{\sqrt{4-x^2-y^2}} \cdot \frac{2}{\cancel{\sqrt{4-x^2-y^2}}}\,dx\,dy$$

$$= \frac{2|A|}{4\pi-8} = \frac{2\pi}{4\pi-8} = \boxed{\frac{\pi}{2\pi-4}}$$

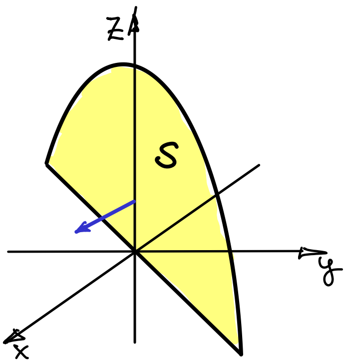
Esercizio 4. Siano $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(-3z, y^2, x^2\right)$ e

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x,\ 0 \le z \le 8 - 8x^2\right\}$$

dove la superficie S è orientata in modo che $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{i} \rangle \ge 0$ in ogni suo punto.

(a) Calcolare $\displaystyle\iint_S \langle \operatorname{rot}(\boldsymbol{F}), d\boldsymbol{S} \rangle$.

(b) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s} \rangle$ dove γ è la curva data dalla parte del bordo di S contenuta nel semispazio $x \ge 0$, percorsa nel verso indotto dall'orientazione di S.



(a) Calcolo diretto:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -3z & y^2 & x^2 \end{bmatrix} = (0, -2x-3, 0)$$

Parametrizzazione di S:

$$\vec{\sigma}(x,z) = (x, 2x, z), \quad A = \left\{(x,z) : 0 \le z \le 8 - 8x^2,\ x \in [-1,1]\right\}$$

$$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_z = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (2, -1, 0)$$

compatibile con l'orientazione data

Quindi

$$\iint_S \langle \operatorname{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = \iint_A \langle (0, -2x-3, 0), (2, -1, 0) \rangle \, dx\, dz$$

$$= \int_{-1}^{1} (2x+3) \left(\int_0^{8-8x^2} dz \right) dx = 8 \int_{-1}^{1} (\overset{\text{dispari}}{2x} + \underset{\text{pari}}{3})(\overset{\text{pari}}{1-x^2})\, dx$$

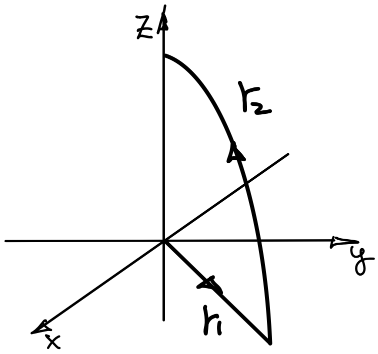
$[-1,1]$ simmetrico

$$= 8 \cdot 3 \cdot 2 \int_0^1 (1-x^2)\, dx = 48 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \boxed{32}$$

(b) Calcolo diretto:

$\vec{\gamma}_1(t) = (t, 2t, 0) \; : \; t \in [0,1]$

$\vec{\gamma}_2(t) = (t, 2t, 8-8t^2) \; : \; t \in [1,0]$



$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle + \int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

$$= \frac{8}{3} + \frac{52}{3} = \boxed{20}$$

dove

$$\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_0^1 \langle (0, 4t^2, t^2), (1,2,0) \rangle dt = 8 \int_0^1 t^2 dt = 8\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

$$\int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_1^0 \langle (-24(1-t^2), 4t^2, t^2), (1,2,-16t) \rangle dt$$

$$= \int_0^1 (16t^3 - 32t^2 + 24) dt = \left[4t^4 - \frac{32t^3}{3} + 24t\right]_0^1 = \frac{52}{3}$$