

Esercizio 1. Sia $f(x, y) = x^2 + 2(x + 4)y^4$.

(a) Determinare i punti stazionari di f stabilendo per ciascuno di essi se si tratta di un punto di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.

(b) Determinare il valore massimo e il valore minimo di f in

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 8y^4 = 12, x \geq 1, y \geq 0\}.$$

$$(a) \nabla f(x, y) = (2x + 2y^4, 8(x + 4)y^3)$$

$$\begin{cases} 2(x + y^4) = 0 \\ 8(x + 4)y^3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = \pm \sqrt[4]{4} = \pm \sqrt{2} \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$x = -4$ $y = 0$

Punti stazionari: $(-4, \sqrt{2}), (-4, -\sqrt{2}), (0, 0)$

Matrice Hessiana $H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 8y^3 \\ 8y^3 & 24(x + 4)y^2 \end{bmatrix}$

$$H_f(-4, \pm\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 2 & \pm 16\sqrt{2} \\ \pm 16\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(H) = -(16\sqrt{2})^2 < 0$$

$$H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det H = 0$$

non si può concludere

$(-4, \pm\sqrt{2})$ sono
punti di SELLA

Notiamo che per $(x, y) \in B_\epsilon(0, 0)$

$$f(x, y) \geq x^2 + 2(-1 + 4)y^4 = x^2 + 6y^4 \geq 0 = f(0, 0)$$

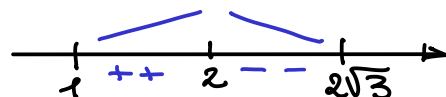
e quindi $(0, 0)$ è un punto di MINIMO RELATIVO

(b) Se $(x, y) \in D$ allora $y = \sqrt[4]{\frac{12 - x^2}{8}}$ con $1 \leq x \leq \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Restringendo la funzione f su D si ha

$$h(x) = f(x, y) = x^2 + 2(x + 4) \cdot \frac{12 - x^2}{8} = x^2 + 3x - \frac{x^3}{4} + 12 - x^2$$

$$h'(x) = 3 - \frac{3x^2}{4} = \frac{3}{4}(4 - x^2)$$



$$h(1) = 15 - \frac{1}{4}, \quad h(2) = 16, \quad h(2\sqrt{3}) = 12.$$

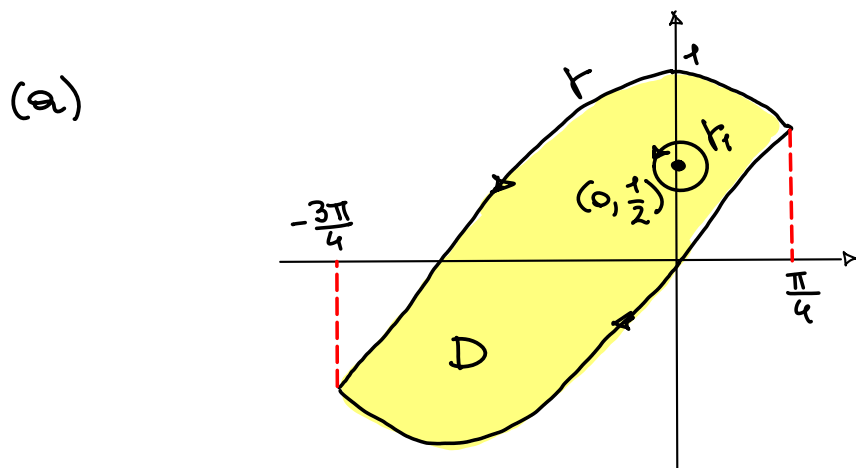
Quindi il VALORE MASSIMO di f su D è 16
il VALORE MINIMO di f su D è 12

Esercizio 2. Siano $\mathbf{F}(x, y) = \left(2xy - \frac{y - \frac{1}{2}}{x^2 + (y - \frac{1}{2})^2}, 3x^2 + \frac{x}{x^2 + (y - \frac{1}{2})^2} \right)$ e

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x) \leq y \leq \cos(x), x \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \right\}.$$

(a) Disegnare l'insieme D .

(b) Calcolare $\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle$ dove γ è la curva data dal bordo di D percorsa in senso antiorario.



(b) Osserviamo che

$$\vec{F} = \left(2xy, 3x^2 \right) + \left(-\frac{y - \frac{1}{2}}{x^2 + (y - \frac{1}{2})^2}, \frac{x}{x^2 + (y - \frac{1}{2})^2} \right)$$

Applicando la formula di Gauss-Green a $\vec{G}$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle \vec{G}, d\vec{s} \rangle &\stackrel{GG}{=} \iint_D \left(\frac{\partial(3x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4x \left(\int_{\sin(x)}^{\cos(x)} y dy \right) dx = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4x (\cos(x) - \sin(x)) dx \\ &= 4 \left[x(\sin(x) + \cos(x)) + \cos(x) - \sin(x) \right]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 3\pi \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -2\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

Dato che $\vec{H}$ è irrotazionale in $D \setminus (0, \frac{1}{2})$, applicando l'invarianza omotopica si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle &= \int_{\gamma_1} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle \\ \gamma_1 &= C_1(0, \frac{1}{2}) \text{ con } r > 0 \text{ sufficientemente piccolo} \\ &= \int_0^{2\pi} \langle (-\frac{r \cos t}{r^2}, \frac{r \sin t}{r^2}), (-r \sin t, r \cos t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Quindi si conclude che

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_{\gamma} \langle \vec{H}, d\vec{s} \rangle + \int_{\gamma} \langle \vec{G}, d\vec{s} \rangle = 2\pi - 2\sqrt{2}\pi$$

Esercizio 3. Calcolare

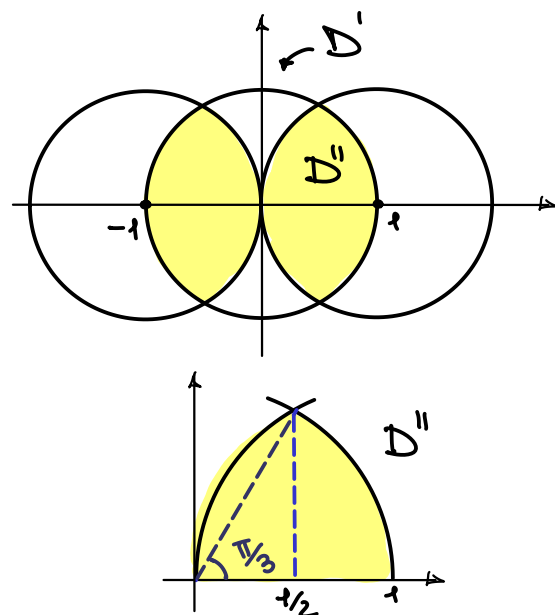
$$\iiint_D \frac{|xyz|}{x^2 + y^2} dx dy dz$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 2|x|, |z| \leq 2\}.$$

$$\begin{aligned} & \iiint_D \frac{|xyz|}{x^2 + y^2} dx dy dz \\ &= 2 \int_0^2 z dz \cdot \iint_{D'} \frac{|xy|}{x^2 + y^2} dx dy \\ & \quad \uparrow \\ & \text{D è simmetrico} \\ & \text{rispetto a } z=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left[z^2 \right]_0^2 \cdot 4 \iint_{D''} \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy \\ & \quad \uparrow \\ & \text{D è simmetrico} \\ & \text{rispetto a } x=0 \text{ e } y=0 \end{aligned}$$



$$\stackrel{CP}{=} 16 \int_{\theta=0}^{\pi/3} \int_{\rho=0}^1 \frac{\cancel{\rho^2} \cos \theta \sin \theta}{\cancel{\rho^2}} \rho d\rho d\theta + 16 \int_{\theta=\pi/3}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^{2\cos \theta} \frac{\cancel{\rho^2} \cos \theta \sin \theta}{\cancel{\rho^2}} \rho d\rho d\theta$$

$$= 16 \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi/3} + 16 \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{2\cos \theta} \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta$$

$$= \cancel{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + 32 \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = 3 + \cancel{32} \left[-\frac{\cos^4 \theta}{4} \right]_{\pi/3}^{\pi/2}$$

$$= 3 + \cancel{8} \cdot \frac{1}{\cancel{16}_2} = \boxed{\frac{7}{2}}$$

Esercizio 4. Sia $\mathbf{F}(x, y, z) = (5x + y, 2y^2, -3z)$.

(a) Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso il bordo del solido

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2x, x + y^2 \leq 1\}$$

orientato verso l'interno.

(b) Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2x, x + y^2 = 1\}$$

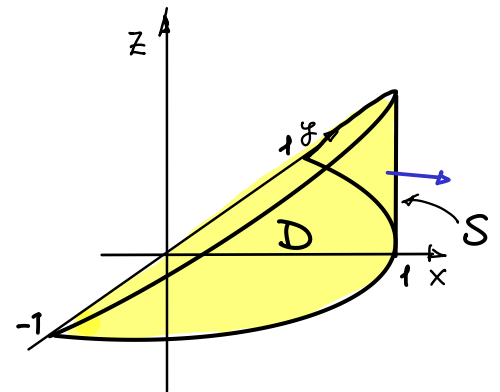
orientata in modo che il vettore normale in $(1, 0, 0)$ sia $(1, 0, 0)$.

(a) Applicando il teorema della divergenza si ha

verso l'interno

$$-\iint_{\partial D} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = -\iiint_D \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz$$

5+4y-3



$$= - \int_{y=-1}^1 (2+4y) \left(\int_{x=0}^{1-y^2} \left(\int_{z=0}^{2x} dz \right) dx \right) dy$$

$$= - \int_{y=-1}^1 (2+4y) [x^2]_0^{1-y^2} dy = - \int_{y=-1}^1 (2+4y) (1-y^2)^2 dy$$

intervallo simmetrico [-1,1]

dispari

$$= -2 \cdot 2 \int_0^1 (1-2y^2+y^4) dy = -4 \left[y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_0^1$$

1-2y^2+y^4

$$= -4 \cdot \frac{8}{15} = -\frac{32}{15}$$

(b) Parametrizzazione di S :

$$\vec{\sigma}(y,z) = (1-y^2, y, z) \text{ con } A = \left\{ (y,z) : \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 2(1-y^2) \\ y \in [-1,1] \end{array} \right\}$$

Con:

$$\vec{\sigma}_y \times \vec{\sigma}_z = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1, 2y, 0) \quad \text{compatibile con l'orientazione data}$$

Dunque il flusso da calcolare è

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_A \langle (5(1-y^2)+y, 2y^2, -3z), (1, 2y, 0) \rangle dy dz$$

$$= \int_{y=-1}^1 \left(\int_{z=0}^{2(1-y^2)} (5-5y^2+y+4y^3) dz \right) dy$$

$$= \int_{y=-1}^1 (5-5y^2 + \overbrace{y+4y^3}^{\text{dispar}}) 2(1-y^2) dy$$

$\leftarrow [-1,1]$ simmetrico

$$= 2 \cdot 10 \int_0^1 (1-y^2)^2 dy = 20 \cdot \frac{8}{15} = \boxed{\frac{32}{3}}$$

vedi (a)