Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica
Soluzione della prova scritta del 8-7-2022

Esercizio 1. Sia $f(x,y) = 2x^2 - 12xy + 16y^2 + y^4$.

(a) Calcolare $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^\alpha}$ al variare di $\alpha > 0$.

(b) Determinare i punti stazionari di f stabilendo per ciascuno di essi se si tratta di un punto di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.

(a) Se $\alpha<1$ allora il limite $\boxed{\text{ESISTE E VALE } 0}$:

$$\frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^\alpha} = \underbrace{\rho^{2(1-\alpha)}}_{\substack{\to 0 \\ \text{per } \alpha<1}} \cdot \Big(\underbrace{\big(2\cos^2\theta - 12\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 16\operatorname{sen}^2\theta\big)}_{|\cdot| \leq 2+12+16 \text{ limitato}} + \underbrace{\rho^2\operatorname{sen}^4\theta}_{\to 0} \Big) \to 0$$

Se $\alpha \geq 1$ allora il limite $\boxed{\text{NON ESISTE}}$:

Per $x=0$ e $y\to0^+$ $\quad \dfrac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^\alpha} = \dfrac{16y^2+y^4}{y^{2\alpha}} \to \begin{cases} 16 & \text{se } \alpha=1 \\ +\infty & \text{se } \alpha>1 \end{cases}$

Per $x=3y$ e $y\to0^+$ $\quad \dfrac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^\alpha} = \dfrac{-2y^2+y^4}{(10y^2)^\alpha} \to \begin{cases} -\frac{1}{5} & \text{se } \alpha=1 \\ -\infty & \text{se } \alpha>1 \end{cases}$

$\neq$ $\quad$ $\neq$

(b) $\nabla f(x,y) = (4x-12y, -12x+32y+4y^3) = 4(x-3y, -3x+8y+y^3)$

$$\begin{cases} x-3y=0 & \to x=3y \\ -3x+8y+y^3=0 & \to -y+y^3=0 \to y(-1+y^2) \to y=0,\pm1 \end{cases}$$

Punti stazionari sono: $(0,0)$, $(3,1)$ e $(-3,-1)$.

Matrice hessiana $\quad H_f(x,y) = 4\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 8+3y^2 \end{bmatrix}$.

$H_f(0,0) = 4\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ $\quad \det(H) = -16 < 0$

$H_f(3,1) = 4\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$ $\quad \det(H) = 32>0$, $\operatorname{tr}(H) = 48>0$

$H_f(-3,-1) = 4\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$ $\quad \det(H) = 32>0$, $\operatorname{tr}(H) = 48>0$

$(0,0)$ è un punto di SELLA

$(3,1)$ è un punto di MINIMO RELATIVO

$(-3,-1)$ è un punto di MINIMO RELATIVO

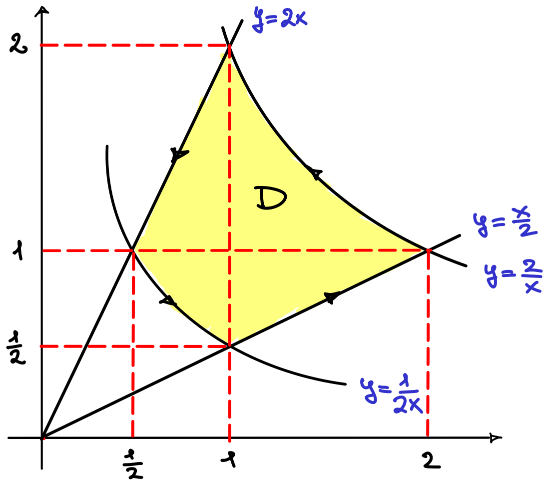
Esercizio 2. Siano $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\dfrac{2x - y(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{2y + x(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} \right)$ e

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 2y \le 4x,\ 1 \le 2xy \le 4,\ x > 0 \right\}.$$

(a) Disegnare l'insieme D.

(b) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s} \rangle$ dove γ è la curva data dal bordo di D percorsa in senso antiorario.

(a)



(b) Osserviamo che $\vec{F} = \left(\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2} - y, \dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2} + x \right) = \nabla U + (-y, x)$

dove $U(x,y) = -\dfrac{1}{x^2+y^2}$ e quindi

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} = 2.$$

Allora applicando la formula di Gauss-Green si ha

$$\int_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle \overset{GG}{=} \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$= 2 \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{\frac{1}{2x}}^{2x} dy \right) dx + 2 \int_{1}^{2} \left(\int_{x/2}^{2/x} dy \right) dx = 2 \int_{1/2}^{1} \left(2x - \frac{1}{2x} \right) dx + 2 \int_{1}^{2} \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2} \right) dx$$

$$= \left[2x^2 - \log(x) \right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[4\log(x) - \frac{x^2}{2} \right]_{1}^{2} = \cancel{\frac{3}{2}} - \log(2) + 4\log(2) - \cancel{\frac{3}{2}} = \boxed{3\log(2)}$$

In alternativa si può fare un cambio di variabili:

$$\begin{cases} u = y/x \\ v = xy \end{cases} \longrightarrow \Phi: \begin{cases} x = \sqrt{\frac{v}{u}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases} \qquad \left| \det(J_\Phi(u,v)) \right| = \frac{1}{2u}$$

$$\iint_D 2\,dx\,dy = \iint_{[\frac{1}{2},2]^2} \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}u}\,du\,dv = \left(2 - \frac{1}{2}\right) \left[\log(u) \right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{3}{2} \log(4) = \boxed{3\log(2)}$$

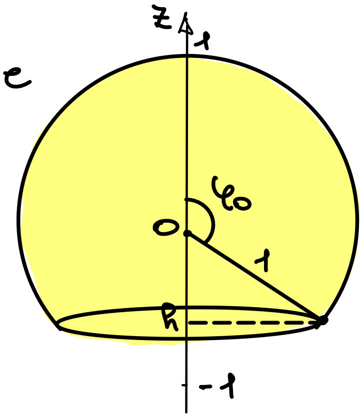
Esercizio 3. Per $h \in (-1,1)$, sia la superficie

$$S_h = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq h\}.$$

(a) Calcolare $I(h) = \dfrac{1}{|S_h|} \displaystyle\iint_{S_h} (x^2+y^2)\, dS$ dove $|S_h|$ è l'area di S_h.

(b) Per quale valore di $h \in (-1,1)$, $I(h)$ assume il valore massimo?

a) In coordinate sferiche $h = \cos\varphi_0$ e l'area di S_h è



$$|S_h| = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi_0} \sin\varphi \, d\varphi \right) d\theta$$

$$= 2\pi \left[-\cos\varphi \right]_0^{\varphi_0} = 2\pi(1-h).$$

Così

$$I(h) = \frac{1}{|S_h|} \iint_{S_h} (x^2+y^2)\, dS = \frac{1}{2\pi(1-h)} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi_0} \overbrace{(\sin\varphi)^2}^{1-\cos^2\varphi} \cdot \sin\varphi \, d\varphi \right) d\theta$$

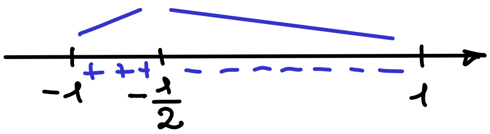
$$= \frac{1}{1-h} \left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3} \right]_0^{\varphi_0} = \frac{1}{1-h} \overbrace{\left(-h + \frac{h^3}{3} + \frac{2}{3} \right)}^{\frac{1}{3}(h^3-3h+2)}$$

$$\begin{array}{l|l} h^3 \quad -3h+2 & h-1 \\ \hline h^3-h^2 & h^2+h-2 \\ \hline / \quad h^2-3h+2 & \\ \quad\ h^2-h & \\ \hline \quad / \ -2h+2 & \end{array}$$

$$= \frac{1}{\cancel{1-h}} \cdot \frac{1}{3} \cancel{(1-h)} (2-h-h^2)$$

$$= \boxed{\frac{2-h-h^2}{3}}$$

(b) $I'(h) = \frac{1}{3}(-1-2h)$



Il valore massimo di $I(h)$ in $(-1,1)$ si ottiene per

$\boxed{h = -\frac{1}{2}}$ con $I\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

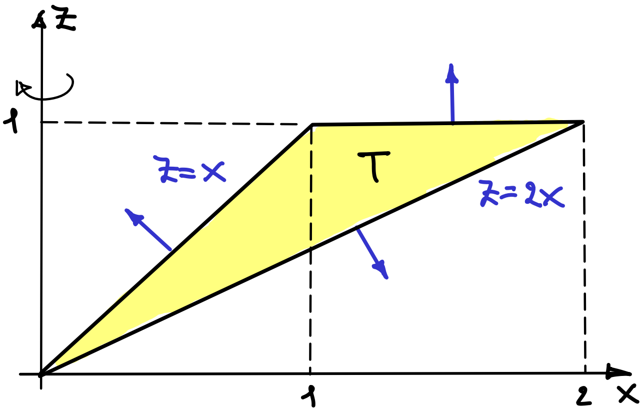
Esercizio 4. Sia D il solido generato dalla rotazione completa dell'insieme

$$T = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le x \le 2z \le 2\}$$

attorno all'asse z e sia S la superficie data dal bordo di D orientata verso l'esterno.

(a) Determinare il piano tangente a S nel punto $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

(b) Calcolare il flusso di $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x, 1, z^2)$ attraverso S.



Ruotando T attorno all'asse z otteniamo

$$D = \{ (x,y,z) : z \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2z, \; 0 \le z \le 1 \}$$

(a) Il punto $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ appartiene alla superficie conica

$$S = \{ (x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} = 2z, \; 0 \le z \le 1 \} \subseteq \partial D$$

$$x^2+y^2-4z^2=0 \xrightarrow{\nabla} (2x, 2y, -8z)$$

Quindi il piano richiesto è

$$\langle (2\cdot\tfrac{1}{2}, 2\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -8\tfrac{1}{2}), (x-\tfrac{1}{2}, y-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, z-\tfrac{1}{2}) \rangle = 0$$

ossia $\boxed{x+\sqrt{3}y-4z=0}$

(b) Applicando il teorema della divergenza si ha

$$\iint_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iiint_D \underbrace{\mathrm{div}(\vec{F})}_{1+2z} \, dx\,dy\,dz$$

$$\overset{cc}{=} \int_{z=0}^{1} \int_{\rho=z}^{2z} \int_{\theta=0}^{2\pi} (1+2z)\rho \, d\theta \, d\rho \, dz =$$

$$= \cancel{2}\pi \int_0^1 (1+2z) \left[\frac{\rho^2}{\cancel{2}} \right]_z^{2z} dz = 3\pi \int_0^1 (z^2+2z^3)\,dz$$

$$= 3\pi \left[\frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{2} \right]_0^1 = \boxed{\frac{5\pi}{2}}$$