

Esercizio 1. Per $x \in \mathbb{R}$, si consideri la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^2 - 1)e^{kx} + \sin(\pi x)k^{-x}}{k+1}.$$

(a) Determinare l'insieme dei valori di x per cui la serie è convergente.

(b) Calcolare il valore della serie per $x = -1$.

$$(a) \text{ Sia } a_k = \frac{(k^2 - 1)e^{kx} + \sin(\pi x)k^{-x}}{k+1} = (k-1)e^{kx} + \frac{\sin(\pi x)}{(k+1)k^x}.$$

Se $x > 0$, $a_k \sim ke^{kx} \rightarrow +\infty$

se $x = 0$, $a_k = k-1 \rightarrow +\infty$

se $x < 0$ e x non è intero, $a_k \sim \sin(\pi x) \cdot \frac{1}{k^{x+1}}$ con $x+1 < 1$
in ogni caso la serie $\sum a_k$ non converge.

Se invece $x < 0$ e x è intero allora $a_k = (k-1)e^{kx}$ e

la serie $\sum a_k$ converge perché $\frac{a_{k+1}}{a_k} \rightarrow e^x < 1$.

(b) Se $x = -1$ allora $a_k = (k-1)e^{-k}$.

Ponendo $z = e^{-1}$ si ha che $|z| < 1$ e

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)z^k &= z \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} z^k = z D\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) - \frac{z}{1-z} \\ &= z D\left(\frac{1}{1-z}\right) - \frac{z}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2} - \frac{z}{1-z} = \frac{z^2}{(1-z)^2}. \end{aligned}$$

Così

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k-1)e^{-k} = \frac{e^{-2}}{(1-e^{-1})^2} = \frac{1}{(e-1)^2}.$$

Esercizio 2. Siano $f(x, y) = x^2 + y^2 - 13x$ e

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| \geq 2 + |y^2 - 4|, 0 < x \leq 8\}.$$

(a) Disegnare l'insieme D .

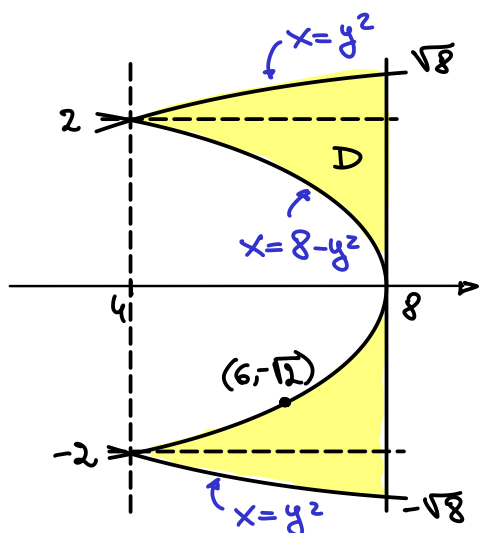
(b) Determinare la retta tangente al bordo di D nel punto $(6, -\sqrt{2})$.

(c) Determinare il valore massimo e il valore minimo di f in D .

(a) Se $0 < x \leq 8$ allora

$$|x-2| \geq 2 + |y^2-4| \begin{cases} \underbrace{x-2}_{<0} \geq \underbrace{2+|y^2-4|}_{\geq 0} & \text{se } 0 < x < 2 \\ & \text{impossibile} \\ x-2 \geq 2 + |y^2-4| & \text{se } 2 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

$$x \geq 4 + |y^2-4| \begin{cases} x \geq 4 + y^2 - 4 & \text{se } |y| \geq 2 \\ x \geq 4 + 4 - y^2 & \text{se } |y| \leq 2 \end{cases}$$



Il bordo di D è $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$:

$$\Gamma_1 = \{(x, y) : g_1(x, y) = x + y^2 - 8 = 0, x \in [4, 8]\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) : g_2(x, y) = y^2 - x = 0, x \in [4, 8]\}$$

$$\Gamma_3 = \{(8, y) : y \in [-\sqrt{8}, \sqrt{8}]\}$$

∂D è regolare a tratti.

(b) Il punto $(6, -\sqrt{2}) \in \Gamma_1$ e la retta tangente è data da

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(6, -\sqrt{2}) \cdot (x-6) + \frac{\partial g_1}{\partial y}(6, -\sqrt{2}) \cdot (y+\sqrt{2}) = 0$$

$$x-6-2\sqrt{2}y-4=0, \quad \boxed{x-2\sqrt{2}y=10}$$

(c) $\nabla f(x, y) = (2x-13, 2y)$ e l'unico punto stazionario

$(\frac{13}{2}, 0) \notin D$. Dato che D è compatto e f è continua i punti di max/min assoluto stanno in ∂D .

Γ_1) Mult. Lagrange:

$$\begin{cases} 2x-13 = \lambda \cdot 1 \\ 2y = \lambda 2y \rightarrow \lambda = 1 \vee y = 0 \\ x+y^2 = 8 \end{cases}$$

$4 \leq x \leq 8$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ x = 7 \\ y = \pm 1 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ x = 8 \end{cases}$$

$$f(7, \pm 1) = -41$$

$$f(8, 0) = -40$$

Inoltre agli estremi: $f(4, \pm 2) = -32$.

Γ_2) Mult. Lagrange:

$$\begin{cases} 2x-13 = -\lambda \cdot 1 \\ 2y = \lambda 2y \rightarrow \lambda = 1 \vee y = 0 \\ y^2 = x \end{cases}$$

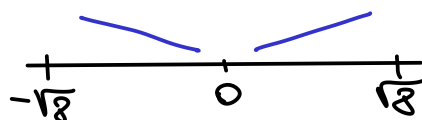
$4 \leq x \leq 8$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ x = 6 \\ y = \pm \sqrt{6} \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \notin \Gamma_2$$

$$f(6, \pm \sqrt{6}) = -36$$

Inoltre agli estremi: $f(4, \pm 2) = -32$, $f(8, \pm \sqrt{8}) = -32$.

Γ_3) Restrizione: $f(8, y) = -40 + y^2$



i punti $(8, \pm \sqrt{8})$ e $(8, 0)$ sono già stati considerati.

Confrontando i valori ottenuti possiamo concludere che il valore massimo di f in D è -32 e quello minimo è -41 .

Esercizio 3. Calcolare

$$\iiint_D |x^2 + y^2 - 2x| dx dy dz$$

con $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, 0 \leq z \leq 3\}$.

Sì ha che

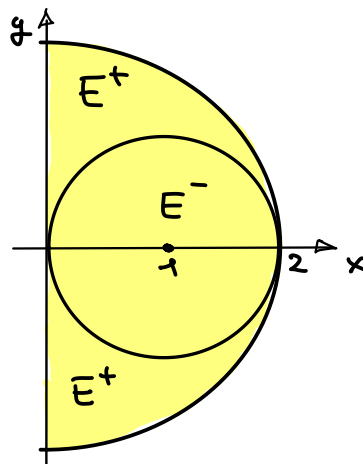
$$\begin{aligned} \iiint_D |x^2 + y^2 - 2x| dx dy dz &= \iint_E |x^2 + y^2 - 2x| \left(\int_{z=0}^3 1 dz \right) dx dy \\ &= 3 \left(\iint_{E^+} (x^2 + y^2 - 2x) dx dy - \iint_{E^-} (x^2 + y^2 - 2x) dx dy \right) \end{aligned}$$

dove $E = E^+ \cup E^-$ con

$$(x-1)^2 + y^2 \geq 1$$

$$E^+ = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$$

$$E^- = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2x \leq 0, x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$$



$$\stackrel{CP}{=} 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2\cos\theta}^2 (r^2 - 2r\cos\theta) r dr - \int_0^{2\cos\theta} (r^2 - 2r\cos\theta) r dr \right) d\theta$$

$$= 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left[\frac{r^4}{4} - 2 \frac{r^3}{3} \cos\theta \right]_{2\cos\theta}^2 - \left[\frac{r^4}{4} - 2 \frac{r^3}{3} \cos\theta \right]_0^{2\cos\theta} \right) d\theta$$

$$= 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4 - \frac{16}{3} \cos\theta + \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{4} \right) \cos^4\theta \right) d\theta$$

$\cos^2\theta(1 - \sin^2\theta) = \cos^2\theta - \frac{\sin^2 2\theta}{4}$

$$= 12\pi - 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta + 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta$$

$$= 12\pi - 32 + 16 \frac{\pi}{4} - 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \boxed{15\pi - 32}$$

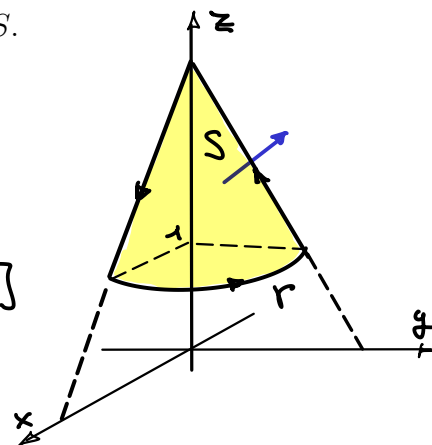
Esercizio 4. Siano $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{z}, 3x^2 - 4z, z^2\right)$ e

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 1 \right\}$$

dove la superficie S è orientata in modo che $\langle \mathbf{n}, \mathbf{k} \rangle \geq 0$ in ogni suo punto.

(a) Calcolare $\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle$ dove γ è la curva data dalla parte del bordo di S contenuta nel piano $z = 1$, percorsa nel verso indotto dall'orientazione di S .

(b) Calcolare $\iint_S \langle \text{rot}(\mathbf{F}), d\mathbf{S} \rangle$.



$$(a) \quad \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1) \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

Quindi

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle (1, 3\cos^2 t - 4, 1), (-\sin t, \cos t, 0) \rangle dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin t + 3\cos^3 t - 4\cos t \, dt$$

$$= \left[\cos t - \sin t - \sin^3 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1 - 1 - 1 = -3$$

$$(b) \quad \text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{z} & 3x^2 - 4z & z^2 \end{bmatrix} = (4, -\frac{1}{z^2}, 6x)$$

S (una parte di cono) è una superficie continua:

$$\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, 2 - \sqrt{x^2 + y^2}) \text{ con } A = \{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0 \}$$

$$\text{Allora } \vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right) \quad (\vec{n}, \vec{k}) \geq 0$$

Così

$$\iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = \iint_A \left(\frac{4x - \frac{y}{z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 6x \right) dx dy$$

$$= \int_{\rho=0}^1 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(4 \cos \theta - \frac{\sin \theta}{(2-\rho)^2} + 6 \rho \cos \theta \right) d\theta \rho d\rho$$

$$= \int_0^1 \left(4\rho - \frac{\rho}{(2-\rho)^2} + 6\rho^2 \right) d\rho$$

$\nearrow \frac{1}{\rho-2} + \frac{2}{(\rho-2)^2}$

$$= \left[2\rho^2 - \log|\rho-2| + \frac{2}{\rho-2} + 2\rho^3 \right]_0^1 = \boxed{3 + \log 2}.$$