

Esercizio 1. Si consideri l'equazione $e^y = 2x + (1 + xy)e^x$.

(a) Verificare che in un intorno di $(0, 0)$ l'equazione definisce implicitamente due funzioni C^2 :

$$y = \varphi(x) \quad \text{e} \quad x = \psi(y).$$

(b) Determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 di $\varphi(x)$ centrato in $x_0 = 0$.

(c) Calcolare $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + \varphi(t))^{\frac{1}{\psi(t)}}$.

(a) Sia $f(x, y) = e^y - 2x - (1 + xy)e^x$ allora $f(0, 0) = 0$
e per il teorema delle funzioni implicite (TFI)
basta verificare che $f_y(0, 0) \neq 0$ per l'esistenza di
 $y = \varphi(x)$ e $f_x(0, 0) \neq 0$ per l'esistenza di $x = \psi(y)$:

$$f_x(x, y) = -2 - ye^x - (1 + xy)e^x \Rightarrow f_x(0, 0) = -2 - 1 = -3 \neq 0$$

$$f_y(x, y) = e^y - xe^x \Rightarrow f_y(0, 0) = 1 \neq 0$$

(b) Abbiamo che $\varphi(0) = 0$ e ancora per il TFI,

$$\varphi'(0) = -\frac{f_x(0, 0)}{f_y(0, 0)} = 3.$$

Inoltre derivando due volte $e^y = 2x + (1 + xy)e^x$ si ha

$$e^y \cdot \varphi' = 2 + (\varphi + x\varphi')e^x + (1 + x\varphi)e^x$$

$$e^y \cdot (\varphi')^2 + e^y \cdot \varphi'' = (2\varphi' + x\varphi'')e^x + 2(\varphi + x\varphi')e^x + (1 + x\varphi)e^x$$

$x=0$ $\rightarrow$ $(3)^2 + \varphi''(0) = (2 \cdot 3 + 0) + 0 + 1 \Rightarrow \varphi''(0) = 7 - 9 = -2$

e quindi il polinomio di Taylor T_2 di φ in 0 è

$$T_2(x) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot x + \frac{1}{2} \varphi''(0) x^2 = \boxed{3x - x^2}$$

(c) Per $t \rightarrow 0$ si ha $\varphi(t) = 3t + o(t)$ e $\psi(t) = \frac{t}{3} + o(t)$

(perché $\varphi'(0) = -f_y(0, 0)/f_x(0, 0) = \frac{1}{3}$) e con

$$(1 + \varphi(t))^{\frac{1}{\psi(t)}} = \exp\left(\frac{\log(1 + \varphi(t))}{\psi(t)}\right) = \exp\left(\frac{3t + o(t)}{\frac{t}{3} + o(t)}\right)$$
$$= \exp(9 + o(1)) \rightarrow \boxed{e^9}$$

Esercizio 2. Sia $F(x, y) = (6y^2 + y^2e^x - 4y, 2ye^x)$.

(a) Calcolare $\int_{\gamma_1} \langle F, ds \rangle$ dove γ_1 è l'unione dei segmenti da $(-1, 1)$ a $(0, 1)$ e da $(0, 1)$ a $(0, 0)$.

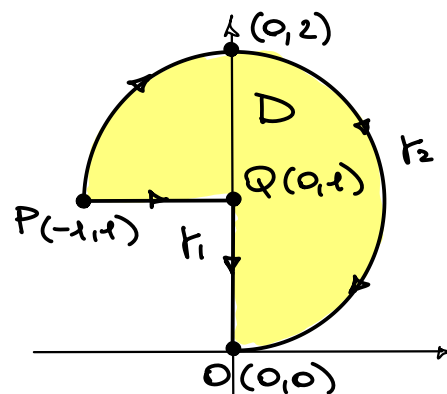
(b) Calcolare $\int_{\gamma_2} \langle F, ds \rangle$ dove γ_2 è l'arco di circonferenza da $(-1, 1)$ a $(0, 0)$ passante per $(0, 2)$.

(a) Dato che $\vec{F} = \nabla U + (6y^2 - 4y, 0)$

con $U(x, y) = y^2 e^x$ e

$[P, Q] : [-1, 0] \ni t \rightarrow (t, 1)$

$[Q, O] : [1, 0] \ni t \rightarrow (0, t)$ allora



$$\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = U(0,0) - U(-1,1) + \int_{[P,Q] \cup [Q,O]} \langle (6y^2 - 4y, 0), d\vec{s} \rangle$$

$$= 0 - e^{-1} + \int_{-1}^0 \langle (2, 0), (-1, 0) \rangle dt + \int_1^0 \langle (6t^2 - 4t, 0), (0, 1) \rangle dt = 2 - e^{-1}$$

(b) Applicando la formula di Gauss-Green a D si ha

$$\int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = - \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

$$= (6\pi + 4) + (2 - e^{-1}) = 6\pi + 6 - e^{-1}$$

perché

$$\rightarrow -\frac{\partial}{\partial y}(6y^2 - 4y)$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (-12y + 4) dx dy$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = 1 + \rho \sin \theta \end{cases} \rightarrow \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\rho=0}^1 (-12 - 12\rho \sin \theta + 4) \rho d\rho d\theta$$

$$= -8 \cdot \frac{3\pi}{2} \cdot \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 + 12 \left[\cos \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cdot \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1$$

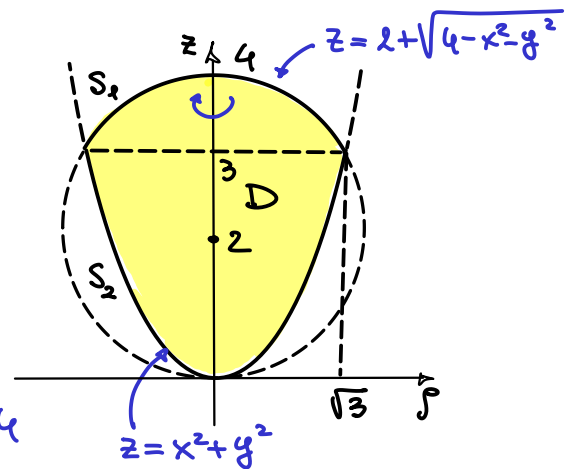
$$= -6\pi + 12(-1) \cdot \frac{1}{3} = -6\pi - 4.$$

Esercizio 3. Si consideri la superficie S data dal bordo del solido

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z, x^2 + y^2 \leq z\}.$$

(a) Determinare il piano tangente a S nel punto $(1, 1, 2)$.

(b) Calcolare l'area totale di S .



Notiamo che

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4z \\ x^2 + y^2 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z + z^2 = 4z \\ z(z-3) = 0 \end{cases}$$

e quindi la superficie data è formata da due parti

$$S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4z, z \geq 3\} \quad \text{calotta sferica}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, z \leq 3\} \quad \text{paraboloide}$$

(a) Il punto $(1, 1, 2) \in S_2$ e dunque il piano tangente è

$$z = 2 + f_x(1, 1)(x-1) + f_y(1, 1)(y-1)$$

con $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ ovvio

$$z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1) = 2x + 2y - 2$$

(b) Considerando S_1 e S_2 come superfici orientate

$$\vec{\sigma}_1 = (x, y, 2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2}) \quad \text{e} \quad \vec{\sigma}_2 = (x, y, x^2 + y^2)$$

con $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 3\}$ troviamo che

$$\|\vec{\sigma}_{1x} \times \vec{\sigma}_{1y}\| = \left\| \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1 \right) \right\| = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$\|\vec{\sigma}_{2x} \times \vec{\sigma}_{2y}\| = \|(2x, 2y, 1)\| = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

e con

$$|S| = |S_1| + |S_2| \stackrel{cc}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{\sqrt{4-\rho^2}} + \sqrt{1+4\rho^2} \right) \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= 2\pi \left[-2\sqrt{4-\rho^2} + \frac{(1+4\rho^2)^{3/2}}{8 \cdot 3/2} \right]_0^{\sqrt{3}} = 2\pi \left(2 + \frac{13^{3/2}-1}{12} \right) = \pi \frac{13^{3/2} + 23}{6}$$

Esercizio 4. Sia $\mathbf{F}(x, y, z) = (zy^3, xy - 1, 5z + 4y^2)$.

(a) Calcolare $\iint_{\partial D} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ dove $D = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq z \leq \frac{9 - x^2 - y^2}{9 + x^2 + y^2}, y \geq 0 \right\}$.

(b) Calcolare $\iint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ dove $S = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq z = \frac{9 - x^2 - y^2}{9 + x^2 + y^2}, y \geq 0 \right\}$

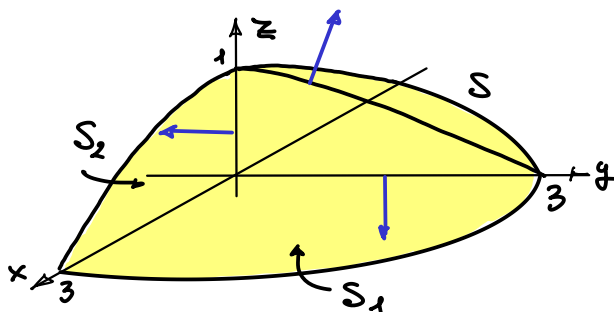
e la superficie S è orientata in modo che il versore normale in $(0, 0, 1)$ sia $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$.

Il bordo del solido D è
formato da tre superfici:

S indicata in (b) e

$$S_1 = \{(x, y, 0) : 0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}\}$$

$$S_2 = \{(x, 0, z) : 0 \leq z \leq \frac{9 - x^2}{9 + x^2}\} \text{ orientate come in figura.}$$



(a) Applicando il teorema della divergenza si ha

$$\iint_{\partial D} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \iiint_D \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx dy dz$$

↪ $0 + x + 5$, Derivativo rispetto a $x=0$ e quindi $\iiint_D x = 0$

$$\stackrel{cc}{=} 5 \int_{\varphi=0}^3 \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_{z=0}^{\frac{9-\varphi^2}{9+\varphi^2}} dz \right) d\theta \right) \varphi d\varphi$$

$$= 5\pi \int_0^3 \frac{9-\varphi^2}{9+\varphi^2} \varphi d\varphi \stackrel{\text{blue}}{=} \frac{18}{9+\varphi^2} - 1 = 5\pi \left[9 \log(9+\varphi^2) - \frac{\varphi^2}{2} \right]_0^3 = 45\pi \left(\log 2 - \frac{1}{2} \right)$$

(b) Per evitare il calcolo diretto usiamo (a)

$$\iint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \iint_{\partial D} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle - \iint_{S_1} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle - \iint_{S_2} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$$

$$= 45\pi \left(\log 2 - \frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{81\pi}{2} \right) - (3\pi - 6) = 45\pi \log 2 + 15\pi + 6$$

perché

$$\iint_{S_1} \langle \vec{F}, (0,0,-1) \rangle dS = - \iint_{\{0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2}\}} (5z + 4y^2) dx dy$$

$$\begin{aligned} &= -4 \int_0^{\pi} \int_0^3 \rho^2 \sin^2 \theta \rho d\rho d\theta \\ &= -4 \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^3 = -\frac{81\pi}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \langle \vec{F}, (0,-1,0) \rangle dS &= - \iint_{\{0 \leq z \leq \frac{9-x^2}{9+x^2}\}} (xy - 1) dx dz \\ &= \int_{-3}^3 \frac{9-x^2}{9+x^2} dx \quad \xrightarrow{\text{pari}} \frac{18}{9+x^2} - 1 \text{ pari} \\ &= 2 \left[6 \arctan\left(\frac{x}{3}\right) - x \right]_0^3 \\ &= 12 \cdot \frac{\pi}{4} - 6 = 3\pi - 6. \end{aligned}$$