1. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali.

(a) $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 5\sin(x)$, (b) $y''(x) - 4y(x) = 16e^x(e^x - 9x)$,

(c) $y^{(4)}(x) - 5y^{(2)}(x) + 4y(x) = 36xe^x$, (d) $y''(x) - y(x) = \dfrac{1 - x^2\ln(x)}{x}$.

Svolgimento:

(a) Polinomio caratteristico:

$$P(z) = z^2 - 2z + 2 = 0 \implies z_{1,2} = 1 \pm i.$$

Soluzione omogenea:

$$y_0(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \operatorname{sen} x.$$

Soluzione particolare: associo a $5\operatorname{sen}x$ il numero i e $P(i) \neq 0$ implica che

$$y_*(x) = A\operatorname{sen}x + B\cos x.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale

$$(-A\operatorname{sen}x - B\cos x) - 2(A\cos x - B\operatorname{sen}x) + 2(A\operatorname{sen}x + B\cos x) = 5\operatorname{sen}x$$

$$(-A + 2B + 2A)\operatorname{sen}x + (-B - 2A + 2B)\cos x = 5\operatorname{sen}x$$

$$\begin{cases} A + 2B = 5 \\ -2A + B = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases} \implies y_*(x) = \operatorname{sen}x + 2\cos x$$

Quindi la soluzione è $y_0(x) + y_*(x)$

$$y(x) = e^x(C_1\cos x + C_2\operatorname{sen}x) + \operatorname{sen}x + 2\cos x. \qquad \square$$

(b) Polinomio caratteristico:

$$P(z) = z^2 - 4 = 0 \implies z_{1,2} = \pm 2.$$

Soluzione omogenea:

$$y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Consideriamo $f(x) = \underbrace{16e^{2x}}_{f_1} - \underbrace{144xe^x}_{f_2}$

Soluzione particolare relativa a $f_1(x) = 16e^{2x}$ a cui associo il numero 2. Dato che 2 è una soluzione di molteplicità 1 in $P(z)=0$ si ha che

$$y_{*,1}(x) = x \cdot (Ae^{2x}).$$

Sostituendo nell'equazione differenziale

$$A(4e^{2x} + 4xe^{2x}) - 4Axe^{2x} = 16e^{2x} \Rightarrow 4A = 16 \Rightarrow A = 4.$$

Quindi $y_{*,1}(x) = 4xe^{2x}$.

Soluzione particolare relativa a $f_2(x) = 144xe^{x}$ a cui associo il numero 1. Dato che $P(1) \neq 0$ si ha che

$$y_{*,2}(x) = (Ax+B)e^{x}.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale

$$(2Ae^{x} + (Ax+B)e^{x}) - 4(Ax+B)e^{x} = 144xe^{x}$$

$$-3Ax + 2A - 3B = 144x \Rightarrow A = -48,\ B = -32.$$

Quindi $y_{*,2}(x) = -(48x+32)e^{x}$.

Infine la soluzione è $y_0(x) + y_{*,1}(x) - y_{*,2}(x)$:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + 4xe^{2x} + (48x+32)e^{x}.$$

$\square$

(c) Polinomio caratteristico:

$$P(z) = z^4 - 5z^2 + 4 = 0 \implies z_{1,2,3,4} = \pm 1, \pm 2.$$

Soluzione omogenea:

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}.$$

Soluzione particolare: associo a $36xe^x$ numero 1 e dato che 1 è soluzione di $P(z)=0$ con molteplicità 1,

$$y_*(x) = x \cdot (Ax+B)e^x.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale

$$e^x\left(Ax^2 + (8A+B)x + (12A+4B)\right)$$
$$-5e^x\left(Ax^2 + (4A+B)x + (2A+2B)\right)$$
$$+4e^x\left(Ax^2 + Bx\right) = 36xe^x$$

da cui

$$0 + (-12A)x + (2A-6B) = 36x \implies A = -3, \ B = -1.$$

Quindi la soluzione è $y_0(x) + y_*(x)$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} - x(3x+1)e^x.$$

$\square$

(d) Polinomio caratteristico:

$$P(z) = z^2 - 1 = 0 \implies z_{1,2} = \pm 1.$$

Soluzione omogenea

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x} - x \ln x$.

Sia $y_*(x) = C_1(x)\cdot e^x + C_2(x)e^{-x}$.

Con il metodo della variazione delle costanti

$$\begin{bmatrix} e^x & e^{-x} \\ (e^x)' & (e^{-x})' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

da cui

$$C_1'(x) = \frac{\det\begin{bmatrix} 0 & e^{-x} \\ f(x) & -e^{-x} \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{bmatrix}} = \frac{e^{-x}f(x)}{2}$$

$$C_2'(x) = \frac{\det\begin{bmatrix} e^x & 0 \\ e^x & f(x) \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{bmatrix}} = \frac{-e^{x}f(x)}{2}$$

Quindi integrando

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}\left(\frac{1}{x} - x\ln x\right)dx,$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^{x}\left(\frac{1}{x} - x\ln x\right)dx.$$

Osserviamo che

$$\int \frac{e^{-x}}{x}dx = \int e^{-x}d(\ln x) = e^{-x}\ln x + \int \ln x\, e^{-x}dx$$

$$= e^{-x}\ln x + \ln x\cdot e^{-x}\cdot x - \int x\cdot\left(\frac{1}{x}e^{-x} - \ln x\cdot e^{-x}\right)dx$$

$$= e^{-x}\ln x\cdot(x+1) + e^{-x} + \int x\ln x\, e^{-x}dx.$$

Dunque

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\left(\int e^{-x}\cdot\frac{1}{x}\,dx - \int e^{-x} \ln x\,dx\right)$$

$$= \frac{e^{-x}}{2}\left(\ln x\cdot(x+1)+1\right).$$

In modo simile si ottiene che

$$C_2(x) = \frac{e^{x}}{2}\left(\ln x\,(x-1)-1\right)$$

e infine

$$y_*(x) = \frac{1}{2}\left(\ln x\,(x+1)+1\right) + \frac{1}{2}\left(\ln x\,(x-1)-1\right) = x\ln x.$$

Così la soluzione è $y_0(x)+y_*(x)$, ossia

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + x\ln x.$$

$\square$

2. Per $a \in \mathbb{R}$, si consideri il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + ay(x) = x \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1 \end{cases}$$

e sia $y(x)$ la sua soluzione.

(a) Per quali valori di a, $y(x)$ ammette un asintoto per $x \to +\infty$?

(b) Esiste un valore di a, tale che $y(x)$ non è strettamente crescente in $[0, +\infty)$?

Svolgimento:

Le soluzioni del polinomio caratteristico z^2+2z+a sono $z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-a}$ e la soluzione omogenea è

$$y_0(x) = \begin{cases} c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x} & \text{per } a<1 \\ e^{-x}(c_1 + c_2 x) & \text{per } a=1 \\ e^{-x}(c_1 \sin(\sqrt{a-1}\,x) \\ \quad + c_2 \cos(\sqrt{a-1}\,x)) & \text{per } a>1 \end{cases}$$

La soluzione particolare è della forma

$y_*(x) = Ax+B$ se $a \neq 0$ e $y_*(x) = x(Ax+B)$ se $a=0$

da cui si ottiene

$y_*(x) = \frac{x}{a} - \frac{2}{a^2}$ se $a \neq 0$ e $y_*(x) = \frac{x}{4}(x-1)$ se $a=0$

La soluzione generale è $y_0(x) + y_*(x)$.

(a) Se $a>0$, per qualunque condizione iniziale $\lim_{x\to+\infty} y_0(x) = 0$ (si noti che per $0<a<1$, z_1 e $z_2 < 0$)

e $y(x)$ ammette come asintoto $y_*(x) = \frac{x}{a} - \frac{2}{a^2}$.

Per $a=0$ invece $\lim_{x\to+\infty} y_0(x) = 0$ ma $y_*(x) = \frac{x^2-x}{4}$

che non ammette un asintoto.

Inoltre se $a<0$

$$y(x) = C_1 e^{z_1 x} + C_2 e^{z_2 x} + \frac{x}{a} - \frac{2}{a^2}$$

con $z_1 = -1 + \sqrt{1-a} > 0$ e $z_2 = -1 - \sqrt{1-a} < 0$.

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{2}{a^2}$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow C_1 \cdot z_1 + C_2 \cdot z_2 = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a}$$

così

$$C_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} \frac{2}{a^2} & 1 \\ \frac{a-1}{a} & z_2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix}} = \frac{\frac{2z_2}{a^2} - \frac{a-1}{a}}{z_2 - z_1} = \frac{2z_2 - a^2 + a}{a^2 (z_2 - z_1)} > 0$$

perché $2z_2 - a^2 + a = -2 - 2\sqrt{1-a} - a^2 + a < 0$ $(a<0)$
e $a^2(z_2 - z_1) < 0$ $(z_1 > 0 > z_2)$.

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{C_1 e^{z_1 x}}{x} = +\infty$$

e y non ammette un asintoto. $\square$

(b) Sì esiste. Ad esempio se $a=5$ allora

$$y(x) = e^{-x}\left(\frac{11}{25}\operatorname{sen} 2x + \frac{2}{25}\cos 2x\right) + \frac{x}{5} - \frac{2}{25}$$

$$y'(x) = e^{-x}\left(-\frac{3}{5}\operatorname{sen} 2x + \frac{4}{5}\cos 2x\right) + \frac{1}{5}$$

e $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{-\pi/4}\left(-\frac{3}{5}\cdot 1 + \frac{4}{5}\cdot 0\right) + \frac{1}{5} < 0$

perché $e^{\pi/4} < e < 3$. $\square$

3. Si consideri il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

e sia $y(x)$ la sua soluzione.

(a) Determinare una costante $M > 0$ tale che $|y(x)| \leq M$ per ogni $x \geq 0$.

(b) Esiste $x_0 > 0$ tale che $y(x_0) = 0$?

Svolgimento:

La soluzione omogenea è $y_0(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$.

La soluzione particolare è della forma

$$y_*(x) = A(x) \cdot \cos x + B(x) \operatorname{sen} x.$$

Per il metodo delle variazioni delle costanti

$$\begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ (\cos x)' & (\operatorname{sen} x)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{1+x^2} \end{bmatrix}$$

da cui

$$A(x) = \int_0^x \det \begin{bmatrix} 0 & \operatorname{sen} t \\ \frac{1}{1+t^2} & \cos t \end{bmatrix} dt = -\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{1+t^2}\, dt$$

$$B(x) = \int_0^x \det \begin{bmatrix} \cos t & 0 \\ -\operatorname{sen} t & \frac{1}{1+t^2} \end{bmatrix} dt = \int_0^x \frac{\cos t}{1+t^2}\, dx.$$

Quindi $y(0) = C_1 = 2$ e

$$y'(x) = -C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x + A'(x) \cos x - A(x) \operatorname{sen} x + B'(x) \operatorname{sen} x + B(x) \cos x.$$

così $y'(0) = C_2 = -1$ e la soluzione è:

$$y(x) = \left(2 - \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{1+t^2}\, dt\right) \cos x + \left(-1 + \int_0^x \frac{\cos t}{1+t^2}\, dt\right) \operatorname{sen} x$$

(a) Abbiamo che per $x \geq 0$

$$|y(x)| = \left(2 + \int_0^x \frac{|\operatorname{sen} t|}{1+t^2}\,dt\right)|\cos x| + \left(1 + \int_0^x \frac{|\cos t|}{1+t^2}\,dt\right)|\operatorname{sen} x|$$

$$\leq 3 + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = 3 + 2\operatorname{arctg} x \leq 3 + \pi = M.$$

$\square$

(b) y è una funzione continua in $[0,+\infty)$

Inoltre $y(0) = 2$ mentre

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt < -1 + \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = -1+1 = 0$$

Quindi per il teorema dei valori intermedi

esiste $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tale che $y(x_0) = 0$.

$\square$

4. Sia $f \in C([0,+\infty))$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.
Rispondere alle seguenti domande.

(a) Se $y(x)$ soddisfa $y'(x) + y(x) = f(x)$ allora $\lim_{x\to+\infty} y(x) = L$?

(b) Se $y(x)$ soddisfa $y'''(x) + y(x) = f(x)$ allora $\lim_{x\to+\infty} y(x) = L$?

Svolgimento:

(a) SÌ. La soluzione dell'equazione differenziale

$$y(x) = y(0)e^{-x} + e^{-x}\int_0^x f(t)\cdot e^t\,dt$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} y(0)\cdot e^{-x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x}\int_0^x f(t)e^t\,dt$$

$$\stackrel{H}{=} 0 + \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} = L. \qquad \square$$

(b) NO. Ad esempio se $f(x) \equiv 0$ allora $L = 0$

L'equazione differenziale lineare omogenea

$$y'''(x) + y(x) = 0$$

ha come polinomio caratteristico z^3+1

le cui soluzioni sono -1, $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Quindi la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\cdot\left(c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Ne segue che la soluzione con $c_1 = c_2 = 0$ e $c_3 = 1$

non soddisfa la proprietà richiesta, ossia

$e^{\frac{x}{2}}\cdot \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$ non tende a $L = 0$ per $x \to +\infty$.

$\square$