Tutorato di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

16 Maggio 2018

1. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali.

(a) $y'(x) = \dfrac{y(x) + 2e^x}{e^x + 1}$ per $x \in \mathbb{R}$, (b) $y'(x) = \dfrac{y(x)}{1 - x^2} + \sqrt{x+1}$ per $x > 1$,

(c) $y'(x) = y(x)\ln(x) + x^x$ per $x > 0$, (d) $y'(x) = \sin(x)\left(\dfrac{y(x)}{\cos(x)} + 4\right)$ per $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$,

(e) $y'(x) - 2y(x) = e^{2x}\ln(x)$ per $x > 0$, (f) $x^2 y''(x) + xy'(x) = y(x)$ per $x > 0$.

2. Risolvere il seguente problema di Cauchy per $x \geq 0$,

$$\begin{cases} y'(x) = |y(x)| + x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

3. Determinare tutte le funzioni derivabili $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tali che per ogni punto P del loro grafico, l'area del triangolo $\triangle OPQ$ è uguale ad 1, dove O è l'origine e Q è l'intersezione della retta tangente in P con l'asse delle y.

4. Sia $y \in C^1([0, +\infty))$ una funzione che soddisfa la disuguaglianza

$$\forall x \geq 0, \qquad y'(x) \leq a(x)y(x)$$

dove $a \in C([0, +\infty))$.

(a) Dimostrare che la funzione

$$R(x) = \frac{y(x)}{\exp(\int_0^x a(t)dt)}$$

è decrescente in $[0, +\infty)$.

(b) Dimostrare che per ogni $x \geq 0$,

$$y(x) \leq y(0)\exp\left(\int_0^x a(t)dt\right).$$

(c) Dimostrare che se esiste $L > 0$ tale che per ogni $x \geq 0$, $a(x) < -L$ e $y(x) \geq 0$ allora l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} y(x)\, dx$$

è convergente.