

Tutorato di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

2 Maggio 2018

1. Determinare la somma delle seguenti serie.

$$(a) \sum_{n=3}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right), \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n2^n + n^2}{(n+1)!},$$
$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^3 + 3n^2 + 2n}, \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor 2^n/5 \rfloor}}{2^n}.$$

2. Determinare quali serie sono convergenti.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n) + \sqrt{n}}{\ln(n+1)(2n^2 + 1 - n^2 \sin(n))}, \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}},$$
$$(c) \sum_{n=3}^{\infty} \left((n \sin(1/n))^{3n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right), \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)}{4^n \binom{2n}{n}},$$
$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}, \quad (f) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

3. Sia $\{a_n\}_{n \geq 1}$ una successione di numeri reali.

Dimostrare o confutare le seguenti proposizioni.

- (a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.
- (b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ converge.
- (c) Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ converge allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ esiste ed è finito.
- (d) Se $0 < a_n < 1/n$ per ogni $n \geq 1$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.
- (e) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge allora $\sum_{n=1}^{\infty} \min \left(|a_n|, \frac{1}{n} \right)$ diverge.

4. Sia f una funzione continua in $[0, +\infty)$ e si consideri la successione $\{a_n\}_{n \geq 1}$, con

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \int_0^n f(x) dx.$$

Rispondere alle seguenti domande.

- (a) Se $f(x) = e^{-x}$ quanto vale $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$?
- (b) Se f è positiva e decrescente allora il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ esiste ed è finito?
- (c) Se f è limitata in $[0, +\infty)$ allora la successione $\{a_n\}_{n \geq 1}$ è limitata?