1. Si consideri la parabola $y = ax^2 + bx + c$ e tre punti distinti A, B e C del suo grafico tali che la retta tangente alla parabola in C sia parallela al segmento AB. Dimostrare che l'area delimitata dal grafico della parabola e dal segmento AB è uguale a 4/3 dell'area del triangolo ABC.

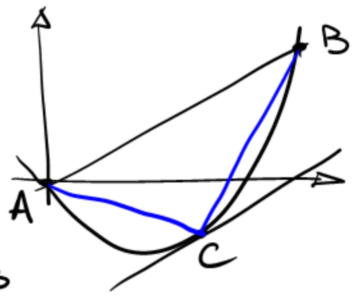
Svolgimento: Sia $f(x) = ax^2 + bx + c$.

A meno di traslazione e riflessione possiamo supporre che $a>0$, $A=(0,0)$ (così $c=0$) e

e $B=(t, f(t))$ con $t>0$.

La retta AB è data da $y = \frac{f(t)}{t} \cdot x = (at+b)x$.

L'area del segmento parabolico è



$$\int_0^t \left((at+b)x - (ax^2+bx)\right)dx$$

$$= \left[(at+b)\frac{x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2}\right]_0^t = \frac{at^3}{6}.$$

Determiniamo la posizione di C:

$$f'(x) = \left((at+b)x\right)' \Rightarrow 2ax + b = at + b \Rightarrow x = \frac{t}{2}$$

quindi $C = \left(\frac{t}{2}, f\left(\frac{t}{2}\right)\right)$.

Calcolo dell'area del triangolo ABC:

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} y_B - y_A & y_C - y_A \\ x_B - x_A & x_C - x_A \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} f(t) & f\left(\frac{t}{2}\right) \\ t & \frac{t}{2} \end{bmatrix}\right|$$

$$= \frac{t}{2}\left|\frac{f(t)}{2} - f\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \frac{t}{2}\left|\frac{at^2}{2} + \cancel{\frac{bt}{2}} - a\frac{t^2}{4} - \cancel{\frac{bt}{2}}\right| = \frac{at^3}{8}.$$

Quindi

$$\frac{\text{Area seg. parabolico}}{\text{Area triangolo ABC}} = \frac{\cancel{at^3}}{6} \cdot \frac{8}{\cancel{at^3}} = \frac{4}{3}.$$

$\square$

2. Calcolare i seguenti integrali indefiniti.

(a) $\displaystyle\int \frac{\arctan(x)}{x^2}\,dx\,,$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx\,,$

(c) $\displaystyle\int \sin^4(x)\cos^3(x)\,dx\,,$ (d) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^3+2x^2-x-2}\,dx\,,$

(e) $\displaystyle\int x\cos(x)e^{-x}\,dx\,,$ (f) $\displaystyle\int \sin(\ln(x))\,dx\,,$

(g) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x+x^2\ln(x)}\,dx\,,$ (h) $\displaystyle\int \left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2 dx\,.$

Svolgimento:

(a) $$\int \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2}\,dx = \int \operatorname{arctg}(x)\, d\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} - \int -\frac{1}{x}\cdot d(\operatorname{arctg} x)$$

$$= -\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= -\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} + \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C. \qquad \square$$

(b) $$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} \underset{\substack{\uparrow\\ t=\sqrt{x}\\ t^2=x,\ 2t\,dt=dx}}{=} \int \frac{2t\,dt}{t^2+t} = 2\int\frac{dt}{t+1}$$

$$= 2\ln|t+1| + C = 2\ln(\sqrt{x}+1) + C. \qquad \square$$

(c) $$\int \operatorname{sen}^4 x\cdot\cos^3 x\,dx = \int \operatorname{sen}^4 x\,(1-\operatorname{sen}^2 x)\,d(\operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C. \qquad \square$$

(d) $$x^3+x+1 = x^3+2x^2-x-2+(-2x^2+2x+3)$$

$$x^3+2x^2-x-2 = (x+2)(x-1)(x+1).$$

Quindi

$$\frac{x^3+x+1}{x^3+2x^2-x-2} = 1 + \frac{-2x^2+2x+3}{(x+2)(x-1)(x+1)}$$

$$= 1 + \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

dove

$$A = \lim_{x\to -2} \frac{-2x^2+2x+3}{\cancel{(x+2)}(x-1)(x+1)} \cdot \cancel{(x+2)} = -3,$$

$$B = \lim_{x\to 1} \frac{-2x^2+2x+3}{(x+2)\cancel{(x-1)}(x+1)} \cdot \cancel{(x-1)} = \frac{1}{2},$$

$$C = \lim_{x\to -1} \frac{-2x^2+2x+3}{(x+2)(x-1)\cancel{(x+1)}} \cancel{(x+1)} = \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^3+2x^2-x-2}\,dx = \int\left(1+\frac{-3}{x+2}+\frac{1/2}{x-1}+\frac{1/2}{x+1}\right)dx$$

$$= x - 3\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$$

$\square$

(e) $$\int x\cos x\, e^{-x}dx = \int x\cos x\, d(-e^{-x})$$

$$= -x\cdot\cos x\, e^{-x} - \int(-e^{-x})\, d(x\cos x)$$

$$= -x\cos x\, e^{-x} + \int e^{-x}(\cos x - x\,\mathrm{sen}\,x)\,dx$$

$$= -x\cos x\, e^{-x} + \int \cos x\, e^{-x}dx - \int x\,\mathrm{sen}\,x\, e^{-x}dx$$

In modo simile

$$\int x \operatorname{sen} x\, e^{-x} dx = \int x \operatorname{sen} x\, d(-e^{-x})$$

$$= -x \cdot \operatorname{sen} x\, e^{-x} - \int (-e^{-x})\, d(x \operatorname{sen} x)$$

$$= -x \operatorname{sen} x\, e^{-x} + \int e^{-x} (\operatorname{sen} x + x \cos x)\, dx$$

$$= -x \operatorname{sen} x\, e^{-x} + \int \operatorname{sen} x\, e^{-x} dx + \int x \cos x \cdot e^{-x} dx .$$

Quindi

$$2\int x \cos x\, e^{-x} dx = -x \cos x\, e^{-x} + \int \cos x\, e^{-x} dx \qquad (*)$$
$$+ x \operatorname{sen} x\, e^{-x} - \int \operatorname{sen} x\, e^{-x} dx .$$

Inoltre

$$\int \cos x\, e^{-x} dx = \int \cos x\, d(-e^{-x})$$

$$= -\cos x\, e^{-x} + \int e^{-x} d(\cos x)$$

$$= -\cos x\, e^{-x} - \int \operatorname{sen} x\, e^{-x} dx$$

$$= -\cos x\, e^{-x} + \int \operatorname{sen} x\, d(e^{-x})$$

$$= -\cos x\, e^{-x} + \operatorname{sen} x\, e^{-x} - \int e^{-x} d(\operatorname{sen} x)$$

$$= (\operatorname{sen} x - \cos x) e^{-x} - \int \cos x\, e^{-x} dx$$

Dunque

$$\int \cos x\, e^{-x} dx = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} x - \cos x) e^{-x} + C .$$

e in modo simile si ottiene

$$\int \operatorname{sen} x\, e^{-x} dx = -\frac{1}{2} (\operatorname{sen} x + \cos x) e^{-x} + C .$$

Infine da $(*)$

$$\int x \cos x\, e^{-x} dx = \frac{x}{2} (\operatorname{sen} x - \cos x) e^{-x} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x\, e^{-x} + C . \qquad \square$$

(f) $$\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ t=\ln x \\ e^t = x\,,\ e^t dt = dx}}{=} \int \operatorname{sen}(t)\cdot e^t\,dt$$

Come nel punto (e) si ha che

$$\int \operatorname{sen} t\, e^t\,dt = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - \cos t)e^t + C.$$

Quindi

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\right)e^{\ln x} + C$$

$$= \frac{x}{2}\left(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + C. \qquad \square$$

(g) $$\int \frac{x-1}{x+x^2\ln x}\,dx = \int\left(\frac{x-1}{x+x^2\ln x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \int \frac{x-\cancel{1}+\cancel{1}+x\ln x}{x(1+x\ln x)}\,dx - \ln x = \int \frac{\overbrace{1+\ln x}^{D(1+x\ln x)}}{1+x\ln x}\,dx - \ln x$$

$$= \ln(1+x\ln x) - \ln x + c = \ln\left(\frac{1}{x}+\ln x\right) + c \qquad \square$$

(h) $$\int\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2 dx \underset{\substack{\uparrow \\ e^x=t}}{=} \int\left(\frac{t-\frac{1}{t}}{t+\frac{1}{t}}\right)^2\frac{dt}{t} = \int\frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^2}\,\frac{dt}{t}$$

$$= \int\left(\frac{1}{t} - \frac{4t}{(t^2+1)^2}\right)dt = \ln t + \frac{2}{t^2+1} + c$$

$$= x + \frac{2}{e^{2x}+1} + C \qquad \square$$

3. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

(a) Esiste un polinomio $P \in \mathbb{Z}[x]$ non identicamente nullo tale che $\int_0^1 e^x P(x)\,dx = 0$.

(b) Se f è una funzione derivabile con la derivata continua in $[0,1]$ tale che $f(0) = f(1) = 0$ allora esiste $t \in [0,1]$ tale che
$$f'(t) = \int_0^1 f(x)dx.$$

(c) Se f è una funzione continua in $[0,1]$ allora esiste $t \in (0,1)$ tale che
$$\int_0^t f(x)dx = \int_t^1 f(x)dx.$$

(d) Se f è una funzione continua in $[0,1]$ tale che per ogni $t \in [0,1]$,
$$\int_0^t f(x)dx = \int_t^1 f(x)dx$$
allora f è identicamente zero in $[0,1]$?

Svolgimento:

(a) VERO. Integrando per parti si ha che
$$\int_0^1 e^x dx = e-1, \quad \int_0^1 xe^x dx = 1, \quad \int_0^1 x^2 e^x dx = e-2.$$
Quindi se $P(x) = ax^2+bx+c$ allora
$$\int_0^1 e^x P(x)\,dx = a(e-2)+b+c(e-1)$$
$$= (a+c)e - (2a-b+c) \overset{?}{=} 0.$$

Per ottenere l'uguaglianza a zero imponiamo
$$\begin{cases} a+c=0 \\ 2a-b+c=0 \end{cases} \quad \text{con } a,b,c \in \mathbb{Z}$$
da cui $a=b=-c$. Ad esempio $P(x) = x^2+x-1$.

Si noti che P non può essere di grado <2:
$$\int_0^1 e^x(ax+b)dx = a+b(e-1) \overset{?}{=} 0 \qquad a,b \in \mathbb{Z}$$
da cui $a=b=0$ perché $e \notin \mathbb{Q}$. $\square$

(b) VERO. Dato che f' è continua in $[0,1]$ per il teorema dei valori intermedi f' assume tutti i valori in $[m, M]$ dove

$$m = \min_{x\in[0,1]} f'(x) \quad e \quad M = \max_{x\in[0,1]} f'(x).$$

Siccome $f(0)=f(1)$ allora per il teorema di Rolle $0 \in [m, M]$ e quindi $m \leq 0$ e $M \geq 0$.

Inoltre $\forall x \in [0,1]$ per il teorema di Lagrange $\exists t \in (0,x)$ tale che

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(t)(x-0) = f'(t)\cdot x$$

e quindi $mx \leq f(x) \leq Mx$. Dunque

$$m \leq \frac{m}{2} = \int_0^1 mx\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 Mx\,dx = \frac{M}{2} \leq M$$

Così $\exists t \in [0,1]$ tale che $f'(t) = \int_0^1 f(x)\,dx$. $\square$

(c) FALSO. Ad esempio se $f(x) = x - \frac{1}{2}$ allora

$$\int_0^t f(x)\,dx - \int_t^1 f(x)\,dx = 2\int_0^t f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^t (2x-1)\,dx - 0 = \left[x^2 - x\right]_0^t = t(t-1)$$

e $t(t-1) < 0 \quad \forall t \in (0,1)$. $\square$

(d) VERO. Per ipotesi, $\forall t \in [0,1]$,

$$0 = \int_0^t f(x)\,dx - \int_t^1 f(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^t f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx$$

e quindi per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$0 = \frac{d}{dt}\left(2\int_0^t f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\right) = 2f(t) + 0$$

ovvero f è identicamente nulla in $[0,1]$.

$\square$

4. Calcolare i seguenti limiti.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{n^2+k^2}$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{4n}\frac{1}{\sqrt{nk}}$,

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2n^3e^{-2k/n}+5k^3}{n^4+3}$, (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$.

Svolgimento:

(a) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{n^2+k^2}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\frac{n+1}{n}\,s\left(\frac{1}{1+x^2},\sigma_n\right)$$

dove $s\left(\frac{1}{1+x^2},\sigma_n\right)$ è la somma inferiore di

$\frac{1}{1+x^2}$ rispetto a σ_n la suddivisione equispaziata

di $[0,1]$ di ampiezza $\frac{1}{n}$.

Passando al limite per $n\to+\infty$ si ottiene

$$1\cdot\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\left[\operatorname{arctg}x\right]_0^1=\frac{\pi}{4}.\qquad\square$$

(b) $$\sum_{k=n}^{4n}\frac{1}{\sqrt{nk}}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{4n}\left(\frac{k}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{n}+s\left(x^{-\frac{1}{2}},\sigma_n\right)$$

dove $s\left(x^{-\frac{1}{2}},\sigma_n\right)$ è la somma inferiore di

$x^{-\frac{1}{2}}$ rispetto a σ_n suddivisione equispaziata

di $[1,4]$ di ampiezza $\frac{1}{n}$.

Passando al limite per $n\to+\infty$ si ottiene

$$0+\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4=4-2=2.\qquad\square$$

(c) $$\sum_{k=1}^{2n} \frac{2n^3 e^{-2k/n} + 5k^3}{n^4+3}$$

$$= \frac{n^4}{n^4+3}\left(\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{2n} e^{-\frac{2k}{n}} + \frac{5}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\right)$$

$$= \frac{n^4}{n^4+3}\cdot\left(2S(e^{-2x}, \sigma_n) + 5S(x^3, \sigma_n)\right)$$

dove σ_n è la suddivisione equispaziata di $[0,2]$ di ampiezza $\frac{1}{n}$.

Passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene

$$1 \cdot \left(2\int_0^2 e^{-2x}\,dx + 5\int_0^2 x^3\,dx\right)$$

$$= \cancel{2}\left[-\frac{e^{-2x}}{\cancel{2}}\right]_0^2 + 5\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = -e^{-4} + 1 + 20 = 21 - e^{-4}.$$

$\square$

(d) Abbiamo che

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = S(\ln(x), \sigma_n)$$

dove σ_n è la suddivisione equispaziata di $[1,2]$ di ampiezza $\frac{1}{n}$. Quindi per $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \to \exp\left(\int_1^2 \ln(x)\,dx\right) = \exp\left(\left[x\ln x - x\right]_1^2\right)$$

$$= \frac{4}{e}$$

$\square$