Tutorato di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

14 Marzo 2018

1. Studiare la convessità/concavità delle seguenti funzioni e tracciarne i grafici.

(a) $f(x) = |x+2|e^{-1/x}$, (b) $f(x) = |x+1| + \arctan(1-x)$,

(c) $f(x) = |x| + \dfrac{1}{1+\cos(x)}$, (d) $f(x) = x\ln(6x - x|x|\lfloor x \rfloor)$.

2. Calcolare i seguenti limiti.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \frac{e^{2x} - e^2\sqrt{2-x}}{\sin(\pi(2x-1))}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\pi}{2\arctan(3(\pi-x))}\right)^{\pi x}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1-4x} - e^{-2x}}{1-x-e^{-x}}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(\frac{(\cos(x))^{1/x}}{x^2} - \frac{2}{2x^2+x^3-2x^4}\right)$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x(1+x)^{1/x} - \ln(1+ex)}{x\sin(x/2)}$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x+5}} - x^2\tan\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right)\right)$.

3. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[0,1]$ e derivabile due volte in $(0,1)$ tale che $f(0) = f(1) = 0$ e $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (0,1)$. Dimostrare o confutare le seguenti proposizioni.

(a) Esiste $x_0 \in (0,1)$ tale che $f(x_0) = f'(x_0)$.

(b) Esiste $x_0 \in (0,1)$ tale che $f(x_0) = -f''(x_0)$.

(c) La funzione $x \to \exp(-f(x))$ è concava in $[0,1]$.

(d) La funzione f è derivabile in 0.

(e) Se $x \in (0,1)$ allora $f(x) < \min(0, xf'(x))$.

(f) Se $r \in (0,1]$ allora esistono $0 \le x < y \le 1$ tali che $y - x = r$ e $f(x) = f(y)$.

4. Sia $f \in C^2([-1,1])$ con un punto stazionario in $x = 0$ e tale che $f(0) = 0$.

(a) Dimostrare che esiste $M \ge 0$ tale che $f(x) \le Mx^2$ per ogni $x \in [-1,1]$.

(b) Dimostrare che esiste $R \in (0,1)$ tale che la circonferenza con centro nel punto di coordinate $(0,R)$ e raggio R interseca il grafico di f solo nell'origine.