

Nome e cognome: _____

1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 5x^2 + 1}{x + 1}} + x^2 \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 5} \right).$$

(a) Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(b) Esiste $a > 0$ tale che $\int_0^a f(x) dx = 0$?

Svolgimento:

(a) Per $x \rightarrow +\infty$, we $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{t} \cdot \frac{(1 + 5t + t^3)^{1/2}}{(1+t)^{1/2}} + \frac{1}{t^2} \left(\ln(1+t^2) - \ln(1+t+5t^2) \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(1 + \frac{5}{2}t + o(t) \right) \left(1 - \frac{t}{2} + o(t) \right) \\ &\quad + \frac{1}{t^2} \left(t^2 + o(t^2) - (t + 5t^2) + \frac{1}{2}(t + 5t^2)^2 + o(t^2) \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(1 + 2t + o(t) \right) + \frac{1}{t^2} \left(-t - \frac{7}{2}t^2 + o(t^2) \right) \\ &= 2 - \frac{7}{2} + o(1) \rightarrow -\frac{3}{2}. \end{aligned} \quad \square$$

(b) Sì, tale a esiste. Consideriamo la

funzione $F(t) = \int_0^t f(x) dx$. F è continua in $[0, +\infty)$.

Dato che $f(0) = 1$ allora $\exists t_1 > 0$: $f(x) \geq \frac{1}{2}$ per $x \in [0, t_1]$.

Allora

$$F(t_1) = \int_0^{t_1} f(x) dx \geq \frac{t_1}{2} > 0.$$

Inoltre, per (a), $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\frac{3}{2}$ e dunque

$\exists t_2 > t_1 : f(x) \leq -1$ per $x \in [t_2, +\infty)$.

Così per $t > t_2$,

$$F(t) = F(t_2) + \int_{t_2}^t f(x) dx \leq F(t_2) - (t - t_2)$$

Quindi $F(t_3) < 0$ per $t_3 = 2t_2 + |F(t_2)|$.

Infine per il teorema degli zeri $\exists a \in (t_1, t_3)$

tale che $F(a) = 0$.

□

2. Per ogni numero intero positivo n si consideri la funzione

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{1}{x^n}.$$

(a) La successione $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente in $(1, 2]$?

(b) Calcolare $\int_1^2 f_1(x) dx$.

Svolgimento:

(a) $\forall x \in (1, 2]$, $f_n(x) \rightarrow 0$ ossia $\{f_n\}$ converge puntualmente a $f=0$ in $(1, 2]$.

D'altra parte per $x_n = 1 + \frac{1}{n} \in (1, 2]$

$$f_n(x_n) = \sqrt{\frac{2+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \sim \frac{\sqrt{2n}}{e} \rightarrow +\infty \neq 0$$

Quindi la successione $\{f_n\}$ NON converge uniformemente a $f=0$ in $(1, 2]$. $\square$

$$(b) \int_1^2 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x} = \int_{+\infty}^{\sqrt{3}} t \cdot \frac{t^2-1}{t^2+1} \left(-\frac{4t}{(t^2-1)^2} dt \right)$$

$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \quad x = \frac{t^2+1}{t^2-1}$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{4t^2}{(t^2+1)(t-1)(t+1)} dt$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \frac{2}{t^2+1} \right) dt$$

$$= \left[\log\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + 2 \operatorname{arctg}(t) \right]_{\sqrt{3}}^{+\infty} = \frac{\pi}{3} + \log(2+\sqrt{3}). \quad \square$$

3. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

(a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin(n))^2}{n}$ è convergente.

(b) Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $L > 0$ tale che per ogni $x, y \in [0, 1]$,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x - y| + \epsilon.$$

Svolgimento:

(a) FALSO. La serie data diverge a $+\infty$.

Notiamo che $\sin^2(x) \geq \frac{1}{4} \quad \forall x \in I_k = [k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{5\pi}{6}]$

$\forall k \in \mathbb{Z}$. Dato che $|I_k| = \frac{2\pi}{3} > 1$, $\forall k \geq 1$ l'intervallo

I_k contiene almeno un intero $n_k \geq 1$. Con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n)^2}{n} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin n_k)^2}{n_k} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1/4}{(k+1)\pi} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty.$$

□

(b) VERO. Verifichiamo che la disuguaglianza vale per $L = \frac{1}{2\epsilon} > 0$. Possiamo supporre che $0 \leq y \leq x \leq 1$.

Abbiamo tre casi:

1) Se $x, y \in [0, \epsilon^2]$ allora

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon$$

2) Se $x, y \in [\epsilon^2, 1]$ allora per il teo. di Lagrange

$\exists t \in (\epsilon^2, 1)$ tale che

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{1}{2\sqrt{t}} |x - y| \leq \frac{1}{2\sqrt{\epsilon^2}} |x - y| = L|x - y|$$

3) Se $x \in [\epsilon^2, 1]$ e $y \in [0, \epsilon^2]$ allora per 2) e 1)

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq |\sqrt{x} - \sqrt{\epsilon^2}| + |\sqrt{\epsilon^2} - \sqrt{y}| \leq L|x - y| + \epsilon. \quad \square$$

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (e^{y(x)} + e^{-y(x)}) \sin(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$ (suggerimento: porre $u(x) = e^{y(x)}$).

(b) Sia I l'intervallo di esistenza di tale soluzione. Esiste $a \in I$ tale che $y(a) < 0$?

Svolgimento:

(a) Posto $u = e^y$ allora $u' = e^y \cdot y' = u \cdot y'$. Così l'eq. diff. diventa a variabili separabili

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \left(u(x) + \frac{1}{u(x)} \right) \sin(x)$$

da cui, integrando,

$$\int \frac{du}{u^2+1} = \int \sin(x) dx \Rightarrow \arctg(e^{y(x)}) = -\cos x + C.$$

Siccome $y(0) = 0$, $\arctg(1) = \frac{\pi}{4} = -1 + C$ e $C = 1 + \frac{\pi}{4}$

Da cui $\arctg(e^{y(x)}) = -\cos x + 1 + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

dove $x \in I = (-r, r)$ con $r = \arccos(1 - \frac{\pi}{4})$ e la soluzione cercata è

$$y(x) = \log\left(\tg\left(1 - \cos x + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

(b) NO non esiste a in I tale che $y(a) < 0$. Infatti

$$y(I) = \log\left(\tg\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)\right)\right) = \log([1, +\infty)) = [0, +\infty).$$

In alternativa si può notare che $\forall x \in I$

$$y'(x) = \underbrace{(e^{y(x)} + e^{-y(x)})}_{>0} \sin x$$


e quindi $y(x)$ ha un minimo assoluto in 0

e $y(0) = 0$.

□