

## Prova scritta di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

14 Febbraio 2019

1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 5x^2 + 1}{x + 1}} + x^2 \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 5}\right).$$

(a) Calcolare il limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(b) Esiste  $a > 0$  tale che  $\int_0^a f(x) dx = 0$ ?

2. Per ogni numero intero positivo  $n$  si consideri la funzione

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{1}{x^n}.$$

(a) La successione  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  converge uniformemente in  $(1, 2]$ ?

(b) Calcolare  $\int_1^2 f_1(x) dx$ .

3. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

(a) La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin(n))^2}{n}$  è convergente.

(b) Per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $L > 0$  tale che per ogni  $x, y \in [0, 1]$ ,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x - y| + \epsilon.$$

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (e^{y(x)} + e^{-y(x)}) \sin(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione  $y(x)$  (suggerimento: porre  $u(x) = e^{y(x)}$ ).

(b) Sia  $I$  l'intervallo di esistenza di tale soluzione. Esiste  $a \in I$  tale che  $y(a) < 0$ ?