Prova scritta di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

31 Gennaio 2019

1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^{x-x^2}}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{\log(x^2 + \cos(2x))}.$$

(a) Determinare il polinomio di Taylor di $g(x) = \log(x^2 + \cos(2x))$ in $x_0 = 0$ di ordine 4.

(b) Calcolare il limite $\lim_{x \to 0} f(x)$.

2. Per $a \in \mathbb{R}$, si consideri l'integrale improprio

$$I(a) = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\tan(x/4)}{((\tan(x/4))^2 - 1)^a}\, dx.$$

(a) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $I(a)$ è convergente.

(b) Calcolare $I(1/2)$.

3. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

(a) Se $\{a_n\}_{n\geq 1}$ è una successione tale che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ allora esiste una successione $\{b_n\}_{n\geq 1}$ di numeri reali positivi tale che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ è convergente.

(b) Sia f una funzione definita in $\mathbb{R}$ tale che per ogni intero positivo n esiste un polinomio P_n tale che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n}.$$

Allora la funzione f è un polinomio.

4. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{2y(x)}{\sin(2x)} + \frac{1}{\sin(x)}.$$

(a) Determinare tutte le soluzione $y(x)$ in $(0, \pi/2)$.

(b) Esiste una soluzione $y(x)$ tale che l'integrale $\int_0^{\pi/2} y(x)\, dx$ sia convergente?