Prova scritta di Analisi Matematica 2 - C. L. in Matematica - 20 Settembre 2018

Nome e cognome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

1. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

(a) Sia f una funzione derivabile e convessa in $(0, +\infty)$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$$

allora $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - xf'(x)) = -\infty$.

(b) Se $a_n \neq -1$ per ogni $n \geq 1$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge.

Svolgimento:

(a) VERO. Per la convessità abbiamo che

$$\forall x, y \in (0, +\infty) \qquad f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x).$$

Posto $y = 1$ si ha che

$$f(1) - f'(x) \geq f(x) - xf'(x).$$

Siccome per $x \to +\infty$ il lato sinistro tende a $-\infty$ la stessa conclusione vale per il lato destro. □

(b) FALSO. Se $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ per $n \geq 1$ allora $a_n \neq -1$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge per Leibniz. Inoltre per $n \geq 2$

$$\frac{a_n}{1+a_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n} - (-1)^n} = \frac{(-1)^{n+1}(\sqrt{n} + (-1)^n)}{n-1}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n-1}}_{\text{decresce e } \to 0} - \frac{1}{n-1}.$$

Dato che $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ converge per Leibniz e $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ diverge a $+\infty$, ne segue che $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = -\infty$.

OSS. La conclusione è vera se $a_n \geq 0$ per $n \geq 1$. □

2. Rispondere alle seguenti domande.

(a) Quanto vale $\int_{-1}^{1} |\arcsin(x)|^2 \, dx$?

(b) Quanto valgono $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} |\arcsin(x)|^n \, dx$ e $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} |\arcsin(x^n)| \, dx$?

Svolgimento:

(a) Posto $x = \operatorname{sen}(t)$, $dx = \cos(t)\,dt$ si ha che

$$\int_{-1}^{1} |\operatorname{arcsen}(x)|^2 dx = 2\int_0^1 \operatorname{arcsen}^2(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} t^2 \cos t \, dt \overset{\text{per parti}}{=} 2\left[t^2 \operatorname{sen} t + 2t\cos t - 2\operatorname{sen} t\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right) = \frac{\pi^2}{2} - 4. \qquad \square$$

(b) Il primo limite vale $+\infty$.

La funzione arcsen$x$ è dispari e crescente.

Quindi se $r \in (\operatorname{sen} 1, 1)$ allora $\operatorname{arcsen}(r) > 1$ e

$$\int_{-1}^{1} |\operatorname{arcsen}(x)|^n dx = 2\int_0^1 (\operatorname{arcsen}(x))^n dx$$

$$\geq 2\int_r^1 (\operatorname{arcsen}(x))^n dx \geq 2(\operatorname{arcsen}(r))^n (1-r) \to +\infty.$$

Il secondo limite vale 0.

La funzione arcsen$x$ è anche convessa su $[0,1]$ e quindi il suo grafico sta sotto la secante $y = \frac{\pi}{2}x$.

$$0 \leq \int_{-1}^{1} |\operatorname{arcsen}(x^n)|\,dx = 2\int_0^1 (\operatorname{arcsen} x^n)\,dx$$

$$\leq 2\int_0^1 \left(\frac{\pi}{2}\cdot x^n\right) dx = \pi\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\pi}{n+1} \to 0. \qquad \square$$

3. Sia $a \in \mathbb{R}$ e per ogni intero $n \geq 1$ sia

$$f_n(x) = \frac{n\cos(x)}{n^2(x-a)^2+1}.$$

(a) Per quali $a \in \mathbb{R}$, la successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$?

(b) Calcolare il limite $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx$ per $a = 0$.

Svolgimento:

(a) Convergenza puntuale:

$$f_n(x) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq a \ \vee \ x = a \wedge \cos(a) = 0 \\ +\infty & \text{se } x = a \text{ e } \cos(a) > 0 \\ -\infty & \text{se } x = a \text{ e } \cos(a) < 0 \end{cases}$$

Quindi per la convergenza uniforme in $\mathbb{R}$ è necessario che $\cos(a) = 0$ con limite $f = 0$. Ma

$$f_n\left(a+\frac{1}{n}\right) = \frac{n\cos\left(a+\frac{1}{n}\right)}{n^2\cdot\frac{1}{n^2}+1} = \frac{n}{2}\Big(\underset{\overset{\|}{0}}{\cos(a)}\cos\left(\tfrac{1}{n}\right) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{n}\right)\Big)$$

$$\sim \frac{n}{2}\left(-\operatorname{sen}(a)\cdot\frac{1}{n}\right) \to -\frac{\operatorname{sen}(a)}{2} \neq 0 = f(a).$$

Quindi $\{f_n\}_n$ NON converge uniformemente in $\mathbb{R}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

$\square$

(b) Sia $a = 0$. Dimostriamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx \overset{nx=t}{=} 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t/n)}{t^2+1}\,dt \to \pi$$

Osserva che

$$\pi - \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots = 2\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t/n)}{t^2+1}\,dt \to 0.$$

Sia $\varepsilon > 0$ allora

1) $\exists \delta > 0$: se $0 \leq \frac{t}{n} \leq \delta$ allora $0 \leq 1 - \cos\left(\frac{t}{n}\right) \leq \varepsilon$

2) $\exists N > 0$: se $n\delta \geq N$ allora $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(n\delta) \leq \varepsilon$

Così se $n \geq \frac{N}{\delta}$

$$0 \leq 2\int_0^{+\infty} \cdots \leq 2\int_0^{\overbrace{n\delta}^{\text{per } 1)}} \frac{\varepsilon}{t^2+1}\,dt + \int_{n\delta}^{+\infty} \frac{2}{t^2+1}\,dt$$

$$\leq 2\varepsilon \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}}_{\frac{\pi}{2}} + 2\underbrace{\left[\operatorname{arctg} t\right]_{n\delta}^{+\infty}}_{\leq \varepsilon \text{ per } 2)} = (\pi+2)\,\varepsilon.$$

$\square$

4. Si consideri per $x \in \mathbb{R}$ il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x)(4x - y'(x)) = 4y(x) \\ y(2) = t \end{cases}$$

(a) Per ogni $t \in \mathbb{R}$, determinare il numero delle soluzioni della forma

$$y(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(b) Per $t = 4$, esiste una soluzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che non sia un polinomio?

Svolgimento:

(a) Sostituendo $y(x) = ax^2+bx+c$ nell'equazione si ha

$$(2ax+b)(4x-2ax-b) = 4ax^2+4bx+4c$$

ossia per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale l'equazione

$$(4a-4a^2)x^2 - 4abx - (b^2+4c) = 0.$$

Se ne deduce che i coefficienti sono zero:

$$\begin{cases} 4a-4a^2=0 \\ 4ab=0 \\ b^2+4c=0 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{cases} a=0 \\ c=-\frac{b^2}{4} \end{cases}}_{\text{I° caso}} \vee \underbrace{\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}}_{\text{II° caso}}$$

Nel I° caso $y(x) = bx - \frac{b^2}{4}$ e siccome $y(2)=t$ si ha $2b - \frac{b^2}{4} = t \Rightarrow b = 4 \pm \sqrt{4(4-t)}$ con $t \leq 4$.

Nel II caso $y(x) = x^2$ e $y(2) = 4 = t$.

Ricapitolando ci sono 0 soluzioni per $t>4$ e 2 soluzioni per $t \leq 4$ (per $t=4$ il I° caso ha una sola soluzione).

(b) Sì. Basta "unire" le due soluzioni polinomiali nel punto di intersezione $(2,2)$

$$y(x) := \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ 4x-4 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

$y \in C^1(\mathbb{R})$ non è un polinomio e risolve il problema. $\square$