Prova scritta di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

30 Agosto 2018

1. Per $n \geq 0$, sia $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

(a) Dimostrare che $0 < e - a_n < \dfrac{2}{n!}$, per ogni $n \geq 0$.

(b) Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n \ln(a_n)}{\ln(n+1) - \ln(n)} - \left(n + \frac{1}{4}\right)^2 \right)$.

2. Sia f una funzione derivabile in $[0, +\infty)$ che sia positiva e decrescente in $[a, +\infty)$ per qualche $a \geq 0$ e tale che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(a) Dimostrare che l'integrale improprio $I(f) := \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) \sin(x)\, dx$ è convergente.

(b) Determinare una funzione f che soddisfa le ipotesi e tale che $I(f) = 0$.

3. Per $n \geq 1$ si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{|x|^n}{|x+4|^n + |x|^n}.$$

(a) Per quali $r > 0$ la successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $[-r, r]$?

(b) Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n f_n(x)\, dx$.

4. Si consideri per $x > 0$ il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^3 y''(x) + 3x^2 y'(x) + x y(x) = 6 \ln(x) \\ y(1) = 0, \quad y'(1) = 1. \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$ in $(0, +\infty)$ (suggerimento: porre $u(t) = y(e^t)$).

(b) Dimostrare o confutare che $y(x) < 2$ per ogni $x > 0$.