Prova scritta di Analisi Matematica 2 - C. L. in Matematica - 1 Febbraio 2018

Nome e cognome:

1. Per $n \in \mathbb{Z}$ si consideri l'integrale improprio

$$I_n = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{(x^2+2)\cos((n^2-4n+3)x)}{x^3}\,dx.$$

(a) Determinare per quali valori di $n \in \mathbb{Z}$ l'integrale improprio è convergente.

(b) Calcolare I_2.

Svolgimento: (a) Sia $a_n = n^2 - 4n + 3 = (n-1)(n-3)$.

Intanto osserviamo che per $x \geq \pi$

$$\left|\frac{2\cos(a_n x)}{x^3}\right| \leq \frac{2}{x^3} \quad e \quad \int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx < +\infty$$

Quindi per il criterio dell'assoluta convergenza I_n è convergente sse converge

$$A_n := \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(a_n x)}{x}\,dx$$

Se $a_n = 0$ ossia per $n=1 \vee n=3$

$$A_1 = A_3 = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty.$$

Se $a_n \neq 0$ allora

$$A_n = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{d(\operatorname{sen}(a_n x))}{a_n x} = \underbrace{\left[\frac{\operatorname{sen}(a_n x)}{a_n x}\right]_{\pi}^{+\infty}}_{=0} + \frac{1}{a_n}\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(a_n x)}{x^2}\,dx$$

Dato che $\left|\frac{\operatorname{sen}(a_n x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ e $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty$ ancora

per il criterio dell'assoluta convergenza A_n è convergente. Quindi I_n converge sse $n \notin \{1,3\}$.

$\square$

(b) Abbiamo che $a_2=-1$, $\cos(-x)=\cos x$ e

$$\int \frac{\cos x}{x}\,dx = \int \frac{d(\operatorname{sen} x)}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \int \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{2\cos x}{x^3}\,dx = -\int \cos x \, d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\cos x}{x^2} - \int \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$$

Così

$$I_2 = \int_{\pi}^{+\infty} \left(\frac{\cos x}{x} + \frac{2\cos x}{x^2}\right) dx = \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}\right]_{\pi}^{+\infty} = -\frac{1}{\pi^2}.$$

$\square$

2. Sia h una funzione continua in $(0, +\infty)$. Per $n \in \mathbb{N}^+$ sia

$$f_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} h(t)\, dt$$

e siano a e b numeri positivi con $a < b$.

(a) La successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $(0, a]$?

(b) La successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $[a, b]$?

(c) La successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $[b, +\infty)$?

Svolgimento: Se $x>0$ allora per il teorema della media integrale $\exists\, t_n \in (x, x+\frac{1}{n})$ tale che

$$f_n(x) = \frac{1}{1/n}\int_x^{x+1/n} h(t)\,dt = h(t_n) \xrightarrow{n\to\infty} h(x)$$

Quindi $f_n \to h$ puntualmente in $(0,+\infty)$.

(a) FALSO. Controesempio $h(x) = \frac{1}{x^2}$. Allora

$$f_n(x) = n\int_x^{x+1/n} \frac{1}{t^2}\,dt = n\left(-\frac{1}{x+\frac{1}{n}} + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x(x+\frac{1}{n})}.$$

Così

$$\sup_{0<x\leq a} |f_n(x) - h(x)| = \sup_{0<x\leq a}\left(\frac{1}{x^2(nx+1)}\right) = +\infty$$

e dunque $f_n \overset{u}{\not\to} h$ in $(0,a]$.

(c) FALSO. Controesempio $h(x) = x^2$. Allora

$$f_n(x) = n\int_x^{x+1/n} t^2\,dt = \frac{n}{3}\left(\left(x+\frac{1}{n}\right)^3 - x^3\right) = x^2 + \frac{x}{n} + \frac{1}{3n^2}.$$

Così

$$\sup_{x\geq b} |f_n(x) - h(x)| = \sup_{x\geq b}\left(\frac{x}{n} + \frac{1}{3n^2}\right) = +\infty$$

e dunque $f_n \overset{u}{\not\to} h$ in $[b,+\infty)$.

(b) VERO

h è uniformemente continua in $[a,b]$:

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : |t-x|<\delta, \ t,x\in[a,b] \Rightarrow |h(t)-h(x)|<\varepsilon.$

Quindi

$$f_n(x)-h(x) = n\int_x^{x+1/n}\big(h(t)-h(x)\big)dt$$

Così se $n>\frac{1}{\delta}$ e $x\in[a,b]$ allora

$$|f_n(x)-h(x)| \le n\int_x^{x+1/n}|h(t)-h(x)|dt < n\cdot\varepsilon\cdot\frac{1}{n}=\varepsilon$$

e $f_n \to h$ uniformemente in $[a,b]$. $\square$

3. Rispondere alle seguenti domande.

(a) Per quali valori di $A, B \in \mathbb{R}$ seguente serie è convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e \left(\frac{n^2}{n^2+n+1} \right)^n + A + \frac{B}{n} \right).$$

(b) Siano $\{a_n\}_{n\geq 1}$ e $\{b_n\}_{n\geq 1}$ due successioni di numeri positivi.
Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è convergente e per ogni $n \geq 1$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

allora anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente?

Svolgimento:

(a) Osserviamo che

$$e\left(\frac{n^2}{n^2+n+1}\right)^n = e\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{-n} \underset{x=\frac{1}{n}}{=} \exp\left(-\frac{1}{x}\ln(1+x+x^2)+1\right)$$

Ora per $x \to 0$

$$\ln(1+x+x^2) = (x+x^2) - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + \frac{1}{3}(x+x^2)^3 + o(x^3)$$

$$= x+x^2-\frac{x^2}{2}-x^3+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$= x+\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3+o(x^3).$$

Così

$$-\frac{1}{x}\ln(1+x+x^2)+1 = -\cancel{1}-\frac{x}{2}+\frac{2x^2}{3}+o(x^2)+\cancel{1}$$

e dunque

$$\exp\left(-\frac{1}{x}\ln(1+x+x^2)+1\right) = 1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{2x^2}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{2x^2}{3}\right)^2+o(x^2)$$

$$= 1-\frac{x}{2}+\frac{2x^2}{3}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)$$

$$= 1-\frac{x}{2}+\frac{19}{24}x^2+o(x^2).$$

Infine

$$a_n = e\left(\frac{n^2}{n^2+n+1}\right)^n + A + \frac{B}{n} = (1+A) + \frac{B-\frac{1}{2}}{n} + \frac{19}{24}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Quindi $\sum a_n$ è convergente sse $A=-1$ e $B=\frac{1}{2}$. $\square$

(b) Per la disuguaglianza data,

$$a_{n+1} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \cdot a_n \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot a_{n-1}$$

$$\leq \frac{b_{n+1}}{\cancel{b_n}} \cdot \frac{\cancel{b_n}}{\cancel{b_{n-1}}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{b_3}}{\cancel{b_2}} \frac{b_2}{b_1} \cdot a_1 .$$

Quindi

$$a_{n+1} \leq \left(\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot b_{n+1} \quad \forall n \geq 0$$

Dato che $\sum b_n$ è una serie positiva convergente per confronto anche la serie positiva $\sum a_n$ è convergente. $\square$

4. Si consideri per $y_0 > 0$ il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)(x^2 y(x) - 2) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$ per $y_0 = 1$ (suggerimento: porre $u(x) = 1/y(x)$).

(b) Determinare per quali valori di $y_0 > 0$ la soluzione è limitata nell'intervallo massimale di esistenza.

Svolgimento:

Se $y(x) = \frac{1}{u(x)}$ allora $y'(x) = \frac{-u'(x)}{u^2(x)}$ e l'eq. diff. diventa

$$-\frac{u'(x)}{u^2(x)} = \frac{1}{u(x)}\left(\frac{x^2}{u(x)} - 2\right)$$

ossia

$$u'(x) - 2u(x) = -x^2.$$

Questa eq. diff. lineare ha come soluzione

$$u(x) = \underbrace{Ke^{2x}}_{\text{sol. omogenea}} + \underbrace{Ax^2 + Bx + C}_{\text{sol. particolare}}$$

Per determinare A, B, C:

$$u'(x) - 2u(x) = (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = -x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A = -1 \\ 2A - 2B = 0 \\ B - 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B = \frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Per determinare K:

$$u(0) = K + C = K + \frac{1}{4} = \frac{1}{y_0} \Rightarrow K = \frac{4 - y_0}{4y_0}$$

Così se $y_0 = 1$ allora $K = 3/4$ e per $x \in \mathbb{R}$

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{\frac{3}{4}e^{2x} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{4}{3e^{2x} + 2x^2 + 2x + 1}.$$

$\square$

(b) In generale per $y_0>0$ la soluzione è

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{\frac{4-y_0}{4y_0}e^{2x} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}}$$

Notiamo che

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{8}$$

Se $0<y_0\leq 4$, $u(x)\geq \frac{1}{8}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ e $0<y(x)\leq 8$ ossia la soluzione è limitata in $\mathbb{R}$.

Se invece $y_0>4$,

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = -\infty \qquad e \qquad u(0)=\frac{1}{y_0}>0$$

quindi $\exists a>0$ tale che $u(x)>0$ in $[0,a)$ e $u(a)=0$. Allora

$$\lim_{x\to a^-} y(x) = \lim_{x\to a^-}\frac{1}{u(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

e la soluzione non è limitata nell'intervallo massimale di esistenza. $\square$