Prova scritta di Analisi Matematica 2 - C. L. in Matematica - 24 Luglio 2017

Nome e cognome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

1. Si consideri l'integrale improprio

$$\int_{-2}^{+\infty} \frac{(x+1)\ln|x+1|}{(x^2+2ax+3a-1)^2}\,dx.$$

(a) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio è convergente?

(b) Calcolare l'integrale per $a = 1$.

Svolgimento:

(a) Sia $f(x)$ la funzione integranda.
Per $x>0$, $f(x)>0$ e per $x \to +\infty$ $f(x) \sim \frac{x \ln x}{x^4} = \frac{\ln x}{x^3}$
quindi l'integrale improprio converge in un intorno di $+\infty$. Inoltre in un intorno di -1 il numeratore si estende per continuità perché $\lim_{x\to -1} (x+1)\ln|x+1| = 0$. Quindi rimangono da controllare gli zeri del denominatore:

$$x^2+2ax+3a-1=0 \Rightarrow x_\pm = -a \pm \sqrt{a^2-3a+1}$$

Se $a^2-3a+1<0$ cioè se $a \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ non ci sono zeri reali e l'integrale è convergente.
Se $a^2-3a+1 \geq 0$ gli zeri sono reali e dobbiamo verificare se stanno nel dominio di integrazione $[-2,+\infty)$. Se $x_- \leq x_+ < -2$ allora sono entrambi fuori e l'integrale è convergente:

$$x_+ = -a + \sqrt{a^2-3a+1} < -2$$

$$\sqrt{a^2-3a+1} < a-2 \Rightarrow a>2$$

$$\cancel{a^2}-3a+1 < \cancel{a^2}-4a+4 \Rightarrow a<3$$

Dunque $x_+ < -2 \iff a \in (2,3)$ e $a^2-3a+1 \geq 0$

Quindi per ora la convergenza è sicura se $a \in \left(\frac{3-\sqrt5}{2}, \frac{3+\sqrt5}{2}\right) \cup \left[\frac{3+\sqrt5}{2}, 3\right) = \left(\frac{3-\sqrt5}{2}, 3\right)$.

Se $a \notin \left(\frac{3-\sqrt5}{2}, 3\right)$ allora $x_+ \in [-2, +\infty)$,

$$f(x) = \frac{(x+1)\ln|x+1|}{(x-x_+)^2(x-x_-)^2}$$

e in un intorno di x_+ l'integrale di f non è convergente.

Così l'integrale converge sse $a \in \left(\frac{3-\sqrt5}{2}, 3\right)$. $\square$

(b) $$\int_{-2}^{+\infty} \frac{(x+1)\ln|x+1|}{((x+1)^2+1)^2}\,dx \underset{x+1=t}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{-1}^{+\infty} \frac{t\ln|t|}{(t^2+1)^2}\,dt = \underbrace{\int_{-1}^{1}\cdots}_{=0 \text{ perché dispari}} + \int_{1}^{+\infty}\cdots$$

$$= -\frac12\int_1^{+\infty} \ln t \, d\left(\frac{1}{t^2+1}\right) = \underbrace{\left[-\frac12 \frac{\ln t}{t^2+1}\right]_1^{+\infty}}_{=0} + \frac12\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\cdot\frac1t\,dt$$

$$= \frac12\int_1^{+\infty}\left(\frac1t - \frac{t}{t^2+1}\right)dt = \frac12\left[\ln t - \frac12\ln(t^2+1)\right]_1^{+\infty}$$

$$= \frac12\left[\ln\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)\right]_1^{+\infty} = -\frac12\ln\left(\frac{1}{\sqrt2}\right) = \frac{\ln 2}{4}. \quad \square$$

2. Sia $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una successione di numeri reali.

(a) Se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ è convergente ad una somma finita allora il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$ esiste ed è finito?

(b) Calcolare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ nei seguenti due casi: $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ e $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ln(n^2+1)}$.

Svolgimento:

(a) VERO Per il criterio dell'assoluta convergenza anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ è convergente. Inoltre

$$a_N = a_1 + \sum_{n=1}^{N-1}(a_{n+1}-a_n)$$

e quindi $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} a_N = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n) \in \mathbb{R}.$ □

(b) Se $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ allora i primi termini della successione sono $\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \ldots$ Notiamo che per $n \geq 3$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}a_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 a_n \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 a_n < a_n.$$

Così

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n| = \sum_{n=1}^{2}(a_{n+1}-a_n) + \sum_{n=3}^{+\infty}(a_n - a_{n+1})$$

$$= \cancel{a_2} - a_1 + a_3 - \cancel{a_2} + a_3 - 0 = 2a_3 - a_1 = \frac{7}{4}.$$

Se $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ln(n^2+1)}$ allora

$$|a_{n+1}-a_n| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln((n+1)^2+1)} - \frac{(-1)^n}{n\ln(n^2+1)}\right|$$

$$= \frac{1}{(n+1)\ln(n^2+2n+2)} + \frac{1}{n\ln(n^2+1)} \sim \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}n\ln n}$$

Dato che $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n} = +\infty$ per il confronto asintotico anche la serie richiesta diverge. □

3. Rispondere alle seguenti domande.

(a) Sia $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una successione di funzioni continue definite in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Se la successione tende puntualmente in $[a,b]$ ad una funzione f allora

$$\lim_{n\to\infty}\left(\inf_{x\in[a,b]} f_n(x)\right) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)?$$

Se la successione tende uniformemente in $[a,b]$ ad una funzione f allora allora

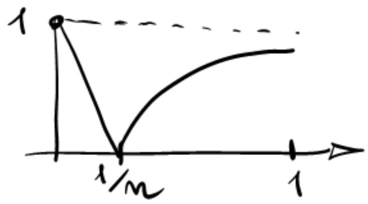
$$\lim_{n\to\infty}\left(\inf_{x\in[a,b]} f_n(x)\right) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)?$$

(b) Quanto vale il seguente limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\inf_{x\in[1/4,+\infty)} \sum_{k=1}^{n}(x-1)^k\right)$?

Svolgimento:

Se f_n tende puntualmente l'uguaglianza può non valere. Ad esempio se in $[0,1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1 - \frac{1}{nx} & \text{se } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$



Allora $f_n(x) \xrightarrow{p} f(x) = 1$ e così

$$\inf_{[0,1]} f_n(x) = 0 \to 0 \neq 1 = \inf_{[0,1]} f(x).$$

Se f_n tende uniformemente allora l'uguaglianza vale. Per Weierstrass $\exists\, x_n \in [a,b]: \inf_{[a,b]} f_n(x) = f_n(x_n)$

Inoltre $f_n \xrightarrow{u} f$ implica che f è continua e ancora per Weierstrass $\exists\, x_0 \in [a,b]: \inf_{[a,b]} f(x) = f(x_0)$.

Quindi

$$f_n(x_n) - f(x_0) \leq f_n(x_0) - f(x_0) \leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

$$f(x_0) - f_n(x_n) \leq f(x_n) - f_n(x_n) \leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

e dunque

$$0 \leq |f(x_0) - f_n(x_n)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

$\square$

(b) Abbiamo che

$$\inf_{x\in[\frac{1}{4},+\infty)} \sum_{k=1}^{n} (x-1)^k = \inf_{t\in[-\frac{3}{4},+\infty)} \sum_{k=1}^{n} t^k$$

$$= \inf_{t\in[-\frac{3}{4},0]} \sum_{k=1}^{n} t^k \quad \left(\text{perché } \sum_{k=1}^{n} t^k \geq 0 \text{ per } t\geq 0 \text{ e vale } 0 \text{ per } t=0\right)$$

$$= \inf_{t\in[-\frac{3}{4},0]} \frac{t(1-t^n)}{1-t} \xrightarrow{(a)} \inf_{t\in[-\frac{3}{4},0]} \frac{t}{1-t} = -\frac{3}{7}$$

Si può applicare la proprietà dimostrata nel punto (a) perché $f_n(t) = \dfrac{t(1-t^n)}{1-t}$ tende unif. a $f(t) = \dfrac{t}{1-t}$ in $[-\frac{3}{4},0]$:

$$\sup_{t\in[-\frac{3}{4},0]} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{t\in[-\frac{3}{4},0]} \frac{|t|^{n+1}}{1-t} \leq \left(3/4\right)^{n+1} \longrightarrow 0 . \quad \square$$

4. Per $a \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = ae^{-x}(y(x))^3 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$ (suggerimento: porre $u(x) = e^x y(x)$).

(b) Per quali valori di a, la soluzione $y(x)$ è uniformemente continua in $\mathbb{R}$?

Svolgimento:

(a) Abbiamo che $y = e^{-x}u$, $y' = -e^{-x}u + e^{-x}u'$
e l'eq. differenziale diventa

$$-\cancel{e^{-x}u} + e^{-x}u' + \cancel{e^{-x}u} = ae^{-x}(e^{-x}u)^3 \Rightarrow u' = ae^{-3x}u^3$$

La condizione $u(0) = e^0(-1) = -1$ esclude la soluzione stazionaria $u=0$.
Separiamo le variabili e integriamo

$$\int \frac{du}{u^3} = a\int e^{-3x}dx \Rightarrow -\frac{1}{2u^2} = -\frac{ae^{-3x}}{3} + c$$

$$\overset{u(0)=-1}{\Longrightarrow} \quad u^2(x) = \frac{3}{3+2a(e^{-3x}-1)} \Rightarrow y(x) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(3-2a)e^{2x}+2ae^{-x}}}. \quad \square$$

(b) La soluzione ottenuta in (a) è definita in $\mathbb{R}$ sse $(3-2a)e^{2x}+2ae^{-x}>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Questo è vero se $(3-2a)\geq 0$ e $2a \geq 0$ cioè $a \in [0, \frac{3}{2}]$.
Altrimenti è falso perché

$$a<0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}((3-2a)e^{2x}+2ae^{-x}) = -\infty$$

$$a>\frac{3}{2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}((3-2a)e^{2x}+2ae^{-x}) = -\infty$$

Se $a=0$ allora $y(x) = -e^{-x}$ non unif. continua in $\mathbb{R}$.
Se $a=\frac{3}{2}$ allora $y(x) = -e^{x/2}$ non unif. continua in $\mathbb{R}$.
Se $a \in (0, \frac{3}{2})$ allora $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = 0$ e quindi y è unif. continua in $\mathbb{R}$.

$\square$