Prova scritta di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

3 Luglio 2017

1. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

(a) Se f è uniformemente continua e derivabile in $(-1,1)$ allora anche f' è uniformemente continua in $(-1,1)$.

(b) Se f è uniformemente continua e derivabile in $\mathbb{R}$ allora anche f' è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

(c) Se f è uniformemente continua in $(-1,1)$ e F è una primitiva di f allora anche F è uniformemente continua in $(-1,1)$.

(d) Se f è uniformemente continua in $\mathbb{R}$ e F è una primitiva di f allora anche F è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

2. (a) Sia f una funzione continua in $[0,+\infty)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Dimostrare che

$$\lim_{r\to 0^+} \int_r^{2r} \frac{f(t)}{t}\,dt = f(0)\ln(2) \quad , \quad \lim_{R\to+\infty} \int_R^{2R} \frac{f(t)}{t}\,dt = 0.$$

(b) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx$ è convergente?

Nel caso sia convergente quanto vale?

3. Stabilire in ciascun caso se la serie sia convergente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^{1+\frac{1}{n}}+1)^n}{n^{n+2}\ln(n^2+1)}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\int_0^{\pi} \cos(nx)e^x\,dx$.

4. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

(a) Determinare tutte le soluzione $y(x)$.

(b) Esiste una soluzione $y(x)$ che sia una funzione limitata in $\mathbb{R}$?