Prova scritta di Analisi Matematica 2 - C. L. in Matematica - 31 gennaio 2017

Nome e cognome:

1. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{e^x - 1} & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Determinare il polinomio di Taylor di ordine 3 di f in 0.
(b) Determinare il polinomio di Taylor di ordine 3 della funzione inversa f^{-1} in 1.

Svolgimento:

(a) Abbiamo che

$$\operatorname{sen} x = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right),$$

$$e^x - 1 = x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right).$$

Quindi

$$f(x) = \frac{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)}.$$

Ricordando che $(1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3)$,

$$f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)^3 + o(x^3)\right)$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + x^2\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) + x^3\left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{2}{12} - \frac{1}{8}\right) + o(x^3)$$

$$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

e quindi il polinomio cercato è

$$T_3(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{12}.$$

□

(b) Dato che $f(0)=1$ e $f'(0)=-\frac{1}{2}\neq 0$, la funzione f è invertibile in un intorno di 0. Il polinomio di Taylor di f^{-1} di ordine 3 centrato in 1 ha la forma

$$S_3(x)=a(x-1)+b(x-1)^2+c(x-1)^3$$

dove a, b, c sono da determinare.

Dato che $f^{-1}(x)=S_3(x)+o((x-1)^3)$,

$$x=f^{-1}(f(x))=S_3\left(T_3(x)+o(x^3)\right)+o\left((f(x)-1)^3\right)$$

$$=a\left(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+\frac{x^3}{12}\right)+b\left(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+\frac{x^3}{12}\right)^2$$

$$+c\left(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+\frac{x^3}{12}\right)^3+o(x^3)$$

$$=-\frac{ax}{2}+x^2\left(-\frac{a}{12}+\frac{b}{4}\right)+x^3\left(\frac{a}{12}+\frac{b}{12}-\frac{c}{8}\right)+o(x^3)$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases}-\frac{a}{2}=1\\ -\frac{a}{12}+\frac{b}{4}=0\\ \frac{a}{12}+\frac{b}{12}-\frac{c}{8}=0\end{cases}\implies\begin{cases}a=-2\\ b=-\frac{2}{3}\\ c=-\frac{16}{9}.\end{cases}$$

Quindi il polinomio cercato è

$$S_3(x)=-2(x-1)-\frac{2}{3}(x-1)^2-\frac{16}{9}(x-1)^3.$$

$\square$

2. Si consideri l'integrale improprio
$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{x^2+x^4}{1-|x|^a}}\,dx.$$

(a) Determinare per quali valori di $a>0$ l'integrale improprio è convergente.
(b) Calcolare l'integrale per $a=2$ e $a=4$.

Svolgimento:

(a) La funzione da integrare è pari quindi basta controllare la convergenza dell'integrale improprio per $x\to 1^-$, ovvero $t\to 0^+$ dove $t=1-x$:

$$\sqrt{\frac{x^2+x^4}{1-|x|^a}}\sim\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-(1-t)^a}}\sim\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cancel{1}-(\cancel{1}-at)}}\sim\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{at}}.$$

Dato che $\frac{1}{\sqrt{t}}$ è integrabile in un intorno di 0^+ l'integrale dato è convergente $\forall a>0$. $\square$

(b) Sia $a=2$ allora

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{x^2+x^4}{1-x^2}}\,dx=2\int_0^1 x\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\,dx\overset{t=x^2}{=}\int_0^1\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,dt$$

$$=\int_0^1\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\left[\operatorname{arcsen}(t)-\sqrt{1-t^2}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}+1.$$

Se $a=4$ allora

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{x^2+x^4}{1-x^4}}\,dx=2\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\left[-2\sqrt{1-x^2}\right]_0^1=2.$$

$\square$

3. Sia f una funzione continua in $[0, +\infty)$ e si consideri la successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$, con

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \int_0^n f(x)dx.$$

Rispondere alle seguenti domande.

(a) Se $f(x) = e^{-x}$ quanto vale $\lim_{n\to\infty} a_n$?

(b) Se $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ allora il limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste ed è finito?

Svolgimento:

(a) $$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k} - \int_0^n e^{-x}dx = \frac{1-e^{n}}{1-e^{-1}} + \left[e^{-x}\right]_0^n$$

$$= \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}} + e^{-n} - 1 \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{1-e^{-1}} - 1 = \frac{1}{e-1}. \quad \square$$

(b) Dimostriamo che più in generale il limite esiste ed è finito se f è positiva e decrescente (come $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$).

Per questo basta verificare che $\{a_n\}_n$ è crescente e superiormente limitata.

1) $\{a_n\}_n$ è crescente:

$$a_{n+1} - a_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+1} \underbrace{(f(n) - f(x))}_{\geq 0} dx \geq 0.$$

2) $\{a_n\}_n$ è superiormente limitata:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\int_{k-1}^{k} f(x)dx}_{\geq f(k)} \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

$$= f(0) - f(n) \leq f(0). \quad \square$$

4. Per ogni intero $n \geq 1$ sia $f_n(t) = \displaystyle\int_t^{t^2} \frac{1}{1+x^{2n}}\, dx$.

(a) Dimostrare che f_n è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

(b) Calcolare il limite puntuale $f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(c) La successione f_n tende uniformemente a f in $\mathbb{R}$?

Svolgimento:

(a) Per il teo. fondamentale del calcolo integrale

$$f_n'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_0^{t^2} \frac{dx}{1+x^{2n}} - \int_0^{t} \frac{dx}{1+x^{2n}}\right) = \frac{2t}{1+t^{4n}} - \frac{1}{1+t^{2n}}.$$

Ora f_n' è continua e $\lim_{t\to\pm\infty} f_n'(t) = 0$ e quindi f_n' è limitata in $\mathbb{R}$. Questo implica che f_n è Lipschitziana in $\mathbb{R}$ e dunque è anche uniformemente continua in $\mathbb{R}$. $\square$

(b) e (c) Consideriamo la successione di funzioni

$$g_n(t) = \int_0^t \frac{dx}{1+x^{2n}}$$

e dimostreremo che g_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ alla funzione continua

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 1 \\ t & \text{se } t \in [-1,1] \\ -1 & \text{se } t \leq -1. \end{cases}$$

Ne seguirà che $f_n(t) = g_n(t^2) - g_n(t)$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$ alla funzione continua

$$f(t) = g(t^2) - g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \geq 1 \\ t^2 - t & \text{se } t \in [-1,1] \\ 2 & \text{se } t \leq -1. \end{cases}$$

Basta far vedere che

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t)-g_n(t)| \overset{\text{g_n e g sono dispari}}{=} \sup_{t\in[0,+\infty)} |g(t)-g_n(t)| \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Infatti se $t\in[0,1]$,

$$|g(t)-g_n(t)| = \left| t - \int_0^t \frac{dx}{1+x^{2n}} \right| = \int_0^t \left(1-\frac{1}{1+x^{2n}}\right)dx$$

$$\leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\,dx \leq \int_0^1 x^{2n}\,dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1} \to 0.$$

Inoltre se $t\in[1,+\infty)$

$$|g(t)-g_n(t)| = \left| 1 - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^{2n}} - \int_1^t \frac{dx}{1+x^{2n}} \right|$$

$$\leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2n}}$$

$$\leq \frac{1}{2n+1} + \left[\frac{x^{1-2n}}{1-2n}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1} \to 0.$$

$\square$

5. Sia il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 6\sin^2(x) - 1 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione $y(x)$.
(b) Calcolare $\liminf_{x\to+\infty} y(x)$ e $\limsup_{x\to+\infty} y(x)$.

Svolgimento:

(a) Dall'equazione caratteristica $z^2+1=0$ otteniamo le soluzioni $\pm i$ e quindi la soluzione omogenea è

$$y_0(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x.$$

Per la soluzione particolare usiamo il metodo della variazione delle costanti. Siano

$$y_*(x) = A(x)\cos x + B(x)\cdot \operatorname{sen} x$$

dove $A(x), B(x)$ soddisfano

$$\begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6\operatorname{sen}^2 x - 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$A(x) = \int A'(x)\,dx = \int (6\operatorname{sen}^2 x - 1)(-\operatorname{sen} x)\,dx$$
$$= \int (5 - 6\cos^2 x)\,d(\cos x) = 5\cos x - 2\cos^3 x,$$

$$B(x) = \int B'(x)\,dx = \int (6\operatorname{sen}^2 - 1)(\cos x)\,dx$$
$$= \int (6\operatorname{sen}^2 x - 1)\,d(\operatorname{sen} x) = 2\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x.$$

Quindi

$$y_*(x) = 5\cos^2 x - 2\cos^4 x + 2\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$= 5\cos^2 x - 2\cos^2 x(1-\cancel{\operatorname{sen}^2 x}) + 2\operatorname{sen}^2 x\,(1-\cancel{\cos^2 x}) - \operatorname{sen}^2 x$$

$$= 3\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 + 2\cos^2 x.$$

La soluzione generale è

$$y(x) = y_0(x) + y_*(x) = C_1\cos x + C_2 \operatorname{sen} x + 1 + 2\cos^2 x.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + 3 = 1 \\ y'(0) = C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = -2 \ \text{ e } \ C_2 = 0$$

e infine la soluzione cercata è

$$y(x) = -2\cos x + 1 + 2\cos^2 x. \qquad \square$$

(b) La soluzione y è $C^1(\mathbb{R})$, pari e periodica di periodo 2π. Quindi basta determinare i suoi punti critici in $[0,\pi]$:

$$y'(x) = 2\operatorname{sen} x - 4\cos x \operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen} x\,(1 - 2\cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \ x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi\right\} \ \text{ e } \ y(0) = 1,\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},\ y(\pi) = 5.$$

Infine

$$\liminf_{x\to+\infty} y(x) = \min_{[0,\pi]} y(x) = \frac{1}{2}$$

$$\limsup_{x\to+\infty} y(x) = \max_{[0,\pi]} y(x) = 5.$$

$\square$