Prova scritta di Analisi Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma “Tor Vergata”

26 luglio 2016

1. Determinare per quali valori di $C \in \mathbb{R}$, esiste $R > 0$ tale che per ogni $x > R$,

$$\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+x+2}} > \cos\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{C}{x^3}\right).$$

2. Per ogni intero positivo n, sia $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 2$,

$$0 < H_n - \ln(n) < 1 \quad \text{e} \quad n\ln n \leq 2\ln(n!) < 2n\ln n.$$

(b) Per quali $x \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n!)(4-|x-1|)^n}{n(n-1)3^n H_n^3}$ è convergente?

3. Per ogni intero $n > 0$ sia $I_n = \int_0^1 \frac{20+10\sqrt{x}+x^n}{4+3x-x^2}\,dx$.

(a) Calcolare $A = \lim_{n\to\infty} I_n$.

(b) Calcolare $B = \lim_{n\to\infty} n(I_n - A)$.

4. Siano $\{f_n\}_{n\geq 1}$ e $\{g_n\}_{n\geq 1}$ due successione di funzioni in $C([0,+\infty))$ che convergono uniformemente in $[0,+\infty)$ rispettivamente alle funzioni f e g. Inoltre per ogni $x \geq 0$ e per ogni $n \geq 1$ si ha che $|f_n(x)| \leq 1$, $0 < |g_n(x)| \leq 1$ e $|g(x)| > 0$.
Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

(a) La successione $\{f_n \cdot g_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $[0,+\infty)$ a $f \cdot g$.

(b) La successione $\{f_n/g_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente in $[0,+\infty)$ a f/g.

5. Considerare la seguente equazione differenziale:

$$u''(x) + u'(x) = 2\left(u(x) + 1 + 5\sin(x)\right).$$

(a) Trovare tutte le soluzioni.

(b) Determinare, nel caso esista, una soluzione u tale che $u(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$?