1. Calcolare $\liminf_{n\to+\infty}$ e $\limsup_{n\to+\infty}$ delle seguenti successioni:

$$\text{i)}\ \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n, \qquad \text{ii)}\ \frac{3^{(-1)^n}+5\cos(n\pi/2)}{(-1)^{3n}+5\cos(2\pi/n)}, \qquad \text{iii)}\ (\sqrt{n}-\lfloor\sqrt{n}\rfloor).$$

Svolgimento: i) Osserviamo che

$$\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n & \text{se } n \text{ è pari} \\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^n & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Inoltre $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ e $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$.

Quindi la successione originale si può considerare come l'"unione" di due sottosuccessioni convergenti.

Dunque
$$\liminf_{n\to+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n = \min\left(e,\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e},$$
$$\limsup_{n\to+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n = \max\left(e,\frac{1}{e}\right) = e. \qquad \square$$

ii) Sia a_n il termine della successione. Allora

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{3+5}{1+5c_n} & \text{se } n\equiv 0 \pmod 4 \\[2ex] \dfrac{3-5}{1+5c_n} & \text{se } n\equiv 2 \pmod 4 \\[2ex] \dfrac{1/3}{-1+5c_n} & \text{se } n\equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

dove $c_n = \cos(2\pi/n)$. Notiamo che c_n per $n\geq 6$ è una successione crescente, $\geq \frac{1}{2}$ che tende a 1.

Quindi
$$a_{4n}=\frac{8}{1+5c_{4n}}\longrightarrow\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$
$$a_{4n+2}=\frac{-2}{1+5c_{4n+2}}\longrightarrow\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$$
$$a_{2n+1}=\frac{1/3}{-1+5c_{2n+1}}\longrightarrow\frac{1}{12}.$$
Così
$$\liminf_{n\to+\infty}a_n=-\frac{1}{3}\quad e\quad \limsup_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{3}.\qquad\square$$

iii) Dato che $\forall x\in\mathbb{R}$, $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor\in[0,1)$

allora $l=\liminf_{n\to+\infty}a_n\geq 0$ e $L=\limsup_{n\to+\infty}a_n\leq 1$.

Inoltre $a_{n^2}=\{\sqrt{n^2}\}=\{n\}=0$ quindi

$\lim_{n\to\infty}a_{n^2}=0$ e $l=0$.

Per $n\geq 0$, $n\leq\sqrt{n^2+2n}<n+1$ e così
$$a_{n^2+2n}=\left\{\sqrt{n^2+2n}\right\}=\sqrt{n^2+2n}-n.$$
Dunque
$$\lim_{n\to\infty}a_{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\cancel{1}+\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-\cancel{1}\right)=1$$
e possiamo concludere che $L=1$. $\square$

2. Calcolare $\liminf\limits_{n\to+\infty}$ e $\limsup\limits_{n\to+\infty}$ delle seguenti successioni definite per ricorrenza:

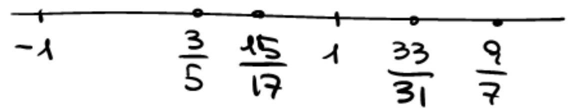
i) $x_0 = -3$ e $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 3}{3x_n + 1}$ per $n \geq 0$,   ii) $x_0 = 1$ e $x_{n+1} = \dfrac{8}{x_n^2}$ per $n \geq 0$.

Svolgimento:

i) Sia $f(x) = \dfrac{x+3}{3x+1}$.

Dato che $f(x) = x$ se e solo se $x \in \{-1, 1\}$ e che i primi elementi della successione $\{x_n\}_{n\geq 0}$ sono:

$$-3,\ 0,\ 3,\ \frac{3}{5},\ \frac{9}{7},\ \frac{15}{17},\ \frac{33}{31},\ \dots$$



sembrerebbe che $x_n \to 1$.

Dimostriamolo facendo vedere che la funzione f è una contrazione nell'intervallo $\left[\frac{15}{17}, \frac{9}{7}\right]$.

$$f'(x) = -\frac{8}{(3x+1)^2}$$

Quindi $f\left(\left[\frac{15}{17}, \frac{9}{7}\right]\right) = \left[f\left(\frac{9}{7}\right), f\left(\frac{15}{17}\right)\right] = \left[\frac{33}{31}, \frac{9}{7}\right] \subseteq \left[\frac{15}{17}, \frac{9}{7}\right]$

e inoltre $\sup\left\{|f'(x)| : x \in \left[\frac{15}{17}, \frac{9}{7}\right]\right\} = \left|f'\left(\frac{15}{17}\right)\right| = \frac{578}{961} < 1$.

Dunque in questo caso,

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n = 1.$$

$\square$

ii) Sia $f(x) = \frac{8}{x^2}$.

Dato che $f(x) = x$ se e solo se $x = 2$ e che i primi elementi della successione sono:

$$1, 8, \frac{1}{8}, 512, \frac{1}{32768}, \dots$$

Non sembra che $x_n \to 2$, invece pare che

$$x_{2n} \to 0 \quad \text{e} \quad x_{2n+1} \to +\infty.$$

Dimostriamolo! Notiamo che per $n \geq 1$

$$x_{2n} = f(x_{2n-1}) = f(f(x_{2n-2})) = g(x_{2n-2})$$

$$x_{2n+1} = f(x_{2n}) = f(f(x_{2n-1})) = g(x_{2n-1})$$

dove $g(x) \stackrel{d}{=} f(f(x)) = \frac{8}{(f(x))^2} = \frac{8x^4}{64} = \frac{x^4}{8}$.

Ora g è una contrazione in $[0,1]$ perché

$$g([0,1]) = [0, \tfrac{1}{8}] \subseteq [0,1] \quad \text{e} \quad \sup_{x \in [0,1]} |g'(x)| = \frac{1}{2} < 1$$

e dato che $x_0 = 1 \in [0,1]$, x_{2n} converge all'unico punto fisso di g in $[0,1]$ ossia 0.

Inoltre passando al limite in $x_{2n+1} = f(x_{2n})$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(x_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{8}{x_{2n}^2} = +\infty.$$

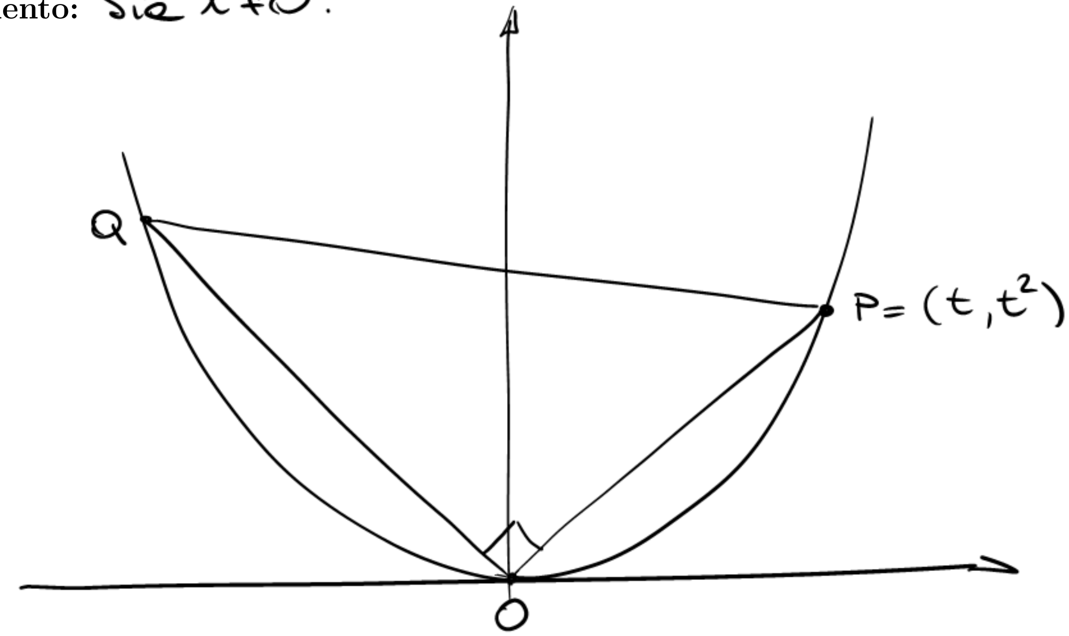
Quindi

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = 0 \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$

$\square$

3. Sia $P = (x, x^2)$ un punto del grafico della parabola $y = x^2$ diverso dall'origine O. Sia l la retta ortogonale in O al segmento OP e sia Q il punto di intersezione diverso da O tra il grafico della parabola $y = x^2$ e la retta l. Determinare la funzione *area del triangolo* OPQ al variare di $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e disegnarne il grafico.

Svolgimento: Sia $t \neq 0$.



La retta OP è data da $y = tx$, mentre la retta OQ è $y = -\frac{1}{t}x$. Quindi per ottenere Q si risolve il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -\frac{1}{t}x \end{cases} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{t}x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{t} \end{cases}$$

e $Q = \left(-\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}\right)$. Così l'area del triangolo OPQ è data da

$$A(t) = \frac{1}{2}|OP|\cdot|OQ| = \frac{1}{2}\left(\left(t^2+t^4\right)\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)\right)^{1/2}$$

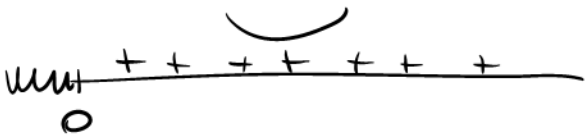
$$= \frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{t^2}+t^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left|t+\frac{1}{t}\right|$$

$A(t) = \frac{1}{2}\left| t + \frac{1}{t} \right|$ è una funzione pari

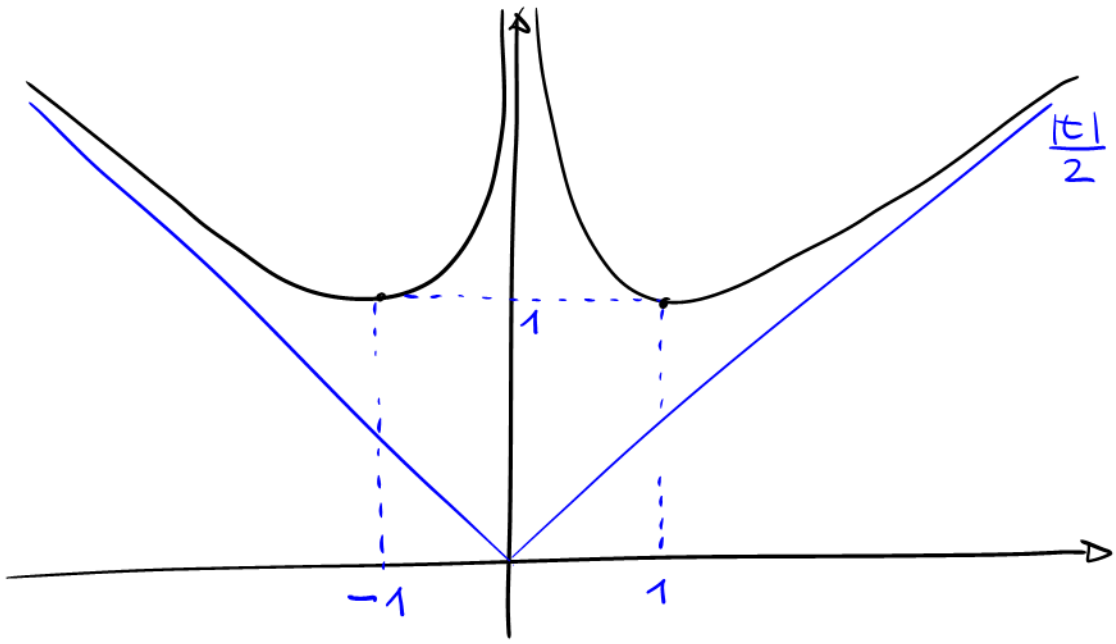
e per $t > 0$

$A'(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)$

$A''(t) = +\frac{1}{t^3}$



Quindi il grafico di $A(t)$ è



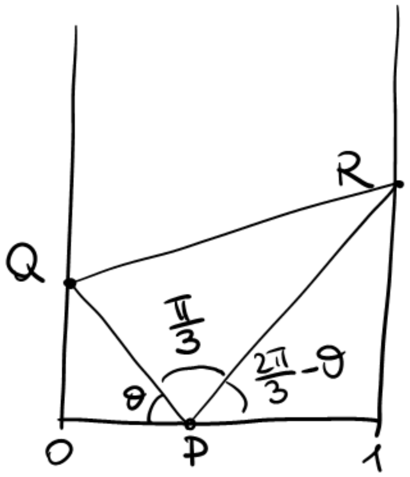
$\square$

4. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

i) Per ogni $x_0 \in (0,1)$ esistono $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^+$ tali che $P = (x_0, 0)$, $Q = (0, y_1)$ e $R = (1, y_2)$ sono i vertici di un triangolo equilatero.

ii) Esiste $x_0 \in (0,1)$ e esistono $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^+$ tali che $P = (x_0, 0)$, $Q = (0, y_1)$ e $R = (1, y_2)$ sono i vertici di un triangolo rettangolo di perimetro 3.

Svolgimento: i) VERO. Poniamo



$$|PQ| = f(\theta) = \frac{x_0}{\cos\theta} \quad \text{per } 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}.$$

$$|PR| = g(\theta) = \frac{1-x_0}{\cos(\frac{2\pi}{3}-\theta)} \quad \text{per } 0 \le \frac{2\pi}{3}-\theta < \frac{\pi}{2}.$$

Quindi PQR è un triangolo equilatero se e solo se

$$f(\theta) = g(\theta) \text{ per qualche } \theta \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ma $f-g$ è continua e

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \big(f(x)-g(x)\big) = -\infty, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \big(f(x)-g(x)\big) = +\infty.$$

Quindi per il Teorema degli zeri

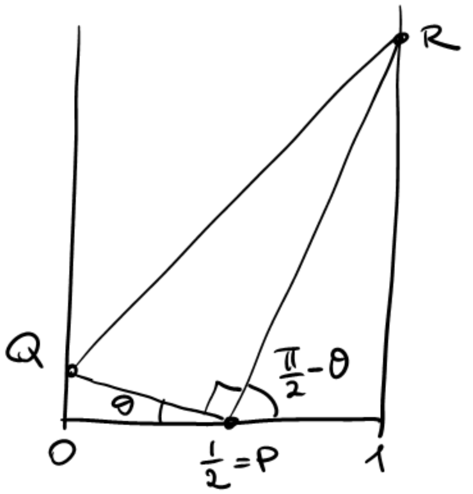
$$\exists\, \theta \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) : f(\theta) - g(\theta) = 0.$$

Nota: risolvendo l'equazione $f(\theta) = g(\theta)$ si trova che $\forall x_0 \in (0,1)$ $\exists!$ triangolo equilatero dato da

$$y_1 = \frac{2-x_0}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{x_0+1}{\sqrt{3}}.$$

$\square$

ii) VERO. Poniamo $x_0 = 1/2 \in (0,1)$ allora



si ha che il perimetro del triangolo rettangolo PQR in funzione dell'angolo $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ è data da

$$p(\theta) = |PQ| + |PR| + |QR| = |PQ| + |PR| + \sqrt{|PQ|^2 + |PR|^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \sqrt{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2}\right)$$

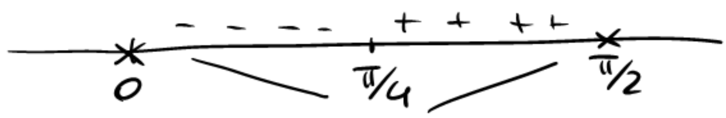
$$= \frac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta + 1}{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1}.$$

Ora p è continua su $(0,\frac{\pi}{2})$ e

$$\lim_{\theta\to 0^+} p(\theta) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} p(\theta) = +\infty$$

e $$p'(\theta) = \frac{(-1)}{(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1)^2}\cdot(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)$$

da cui



e $\frac{\pi}{4}$ è un punto di minimo assoluto in $(0,\frac{\pi}{2})$.

Dato che $p\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$, per il teorema dei valori intermedi $p\left((0,\frac{\pi}{2})\right) = [\sqrt{2}+1, +\infty)$.

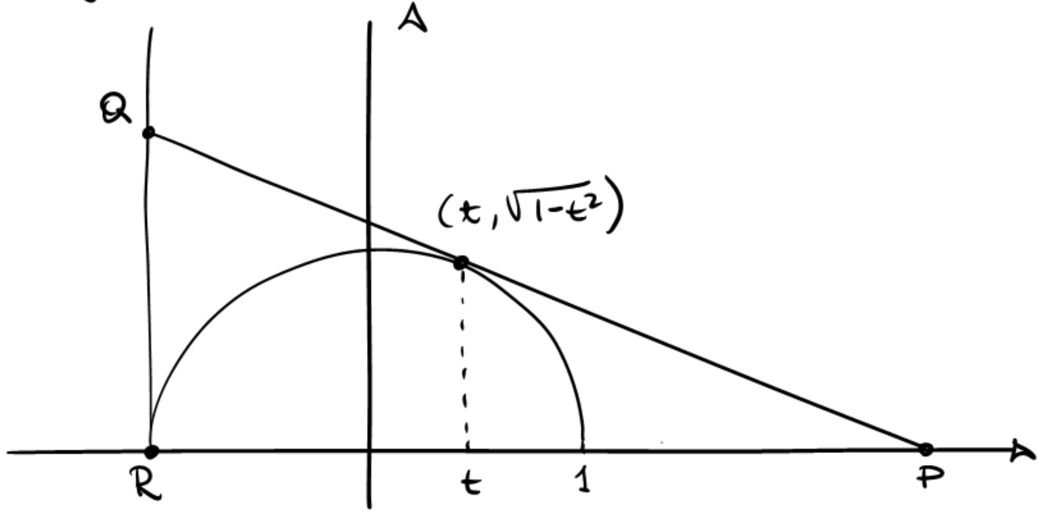
Siccome $3 \in [\sqrt{2}+1, +\infty)$, esiste il triangolo rettangolo richiesto. $\square$

5. Rispondere alle seguenti domande.

i) Si consideri l'insieme dei coni (circolari retti) circoscritti a una sfera di raggio unitario. Qual è l'altezza del cono di volume minimo?

ii) Si consideri l'insieme dei coni (circolari retti) inscritti in una sfera di raggio unitario. Qual è l'altezza del cono di superficie totale massima?

Svolgimento: i) Ogni cono circoscritto può essere ottenuto scegliendo $t \in (0,1)$ e ruotando il triangolo PQR intorno all'asse x.



dove $R = (-1, 0)$. PQ sta sulla retta tangente

$$y = \frac{-\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{1-t^2}}(x-t) + \sqrt{1-t^2}.$$

Quindi

$$x = -1 \Rightarrow y = \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow Q = \left(-1, \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\right),$$

e

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{t} \Rightarrow P = \left(\frac{1}{t}, 0\right).$$

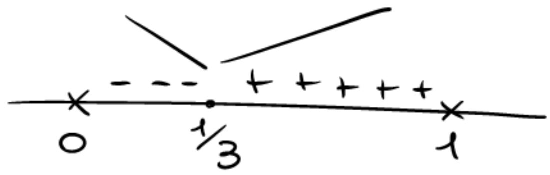
La funzione del volume del cono per $t \in (0,1)$ è

$$V(t) = \frac{1}{3}\cdot\pi|QR|^2\cdot|RP| = \frac{\pi}{3}\frac{(1+t)^2}{1-t^2}\left(1+\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{3}\frac{(1+t)^2}{t(1-t)}$$

Studiamo la monotonia di V in $(0,1)$

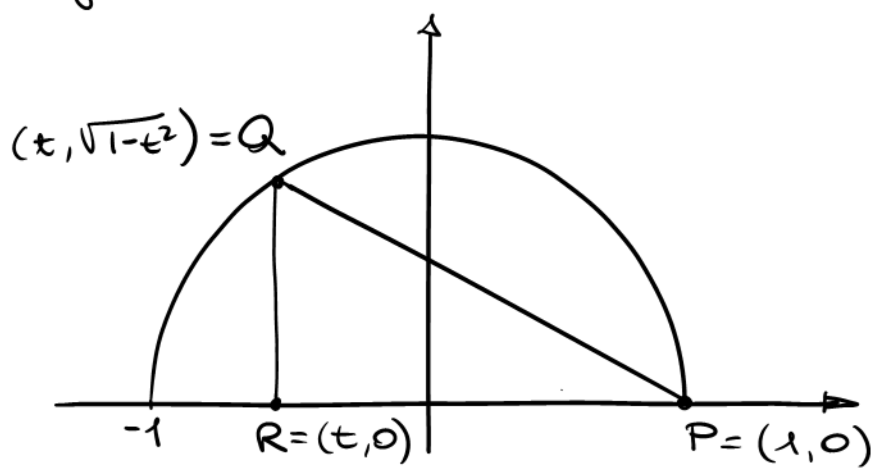
$$V'(t) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2(1+t)(t-t^2) - (1+t)^2(1-2t)}{t^2(1-t)^2}$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(1+t)(3t-1)}{t^2(1-t)^2}$$



Quindi il volume minimo si ottiene per $t = 1/3$ e l'altezza del cono corrispondente è $h = |PR| = 1 + \frac{1}{t} = 4$. $\square$

ii) Ogni cono inscritto può essere ottenuto scegliendo $t \in [-1,1]$ e ruotando il triangolo PQR intorno all'asse x.



La funzione della superficie totale del cono per $t \in [-1,1]$ è

$$S(t) = \pi|QR|^2 + \pi|QR| \cdot |PQ|$$

$$= \pi\left(1-t^2 + \sqrt{1-t^2} \cdot \sqrt{(1-t)^2 + 1 - t^2}\right)$$

$$= \pi\left(1-t^2 + (1-t)\sqrt{2}\sqrt{1+t}\right).$$

S è derivabile in $(-1,1]$:

$$S'(t) = \pi\left(-2t - \sqrt{2}\sqrt{1+t} + \frac{(1-t)\sqrt{2}}{2\sqrt{1+t}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{1+t}}\left(-4t\sqrt{1+t} - 2\sqrt{2}(1+t) + \sqrt{2}(1-t)\right)$$

$$= \frac{(-\pi)}{2\sqrt{1+t}}\left(4t\sqrt{1+t} + \sqrt{2} + 3\sqrt{2}t\right).$$

Ora dato che S è continua in $[-1,1]$, $S(-1) = S(1) = 0$, $S(t) > 0$ in $(-1,1)$ e S è derivabile in $(-1,1)$, allora i punti di massimo sono interni e lì la derivata si annulla. Ma $S'(t) = 0$ in $(-1,1)$ se e solo se $4t\sqrt{1+t} + \sqrt{2} + 3\sqrt{2}t = 0$ $(*)$.

Risolviamo tale equazione in $(-1,1)$:

$$\left(\sqrt{2} + 3\sqrt{2}t\right)^2 = \left(-4t\sqrt{1+t}\right)^2$$

$$2 + 18t^2 + 12t = 16t^2(1+t)$$

$$2(t-1)(8t^2+7t+1) = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = 1, \quad t_2 = \frac{-7+\sqrt{17}}{16}, \quad t_3 = \frac{-7-\sqrt{17}}{16}$$

e tra queste solo t_2 risolve $(*)$ in $(-1,1)$.

Quindi la superficie totale massima si ottiene per $t = t_2$ e in tal caso l'altezza è $h = |PR| = 1 - t_2 = \frac{23-\sqrt{17}}{16} \simeq 1.798$. $\square$