Tutorato di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

18 dicembre 2014

1. Calcolare $\liminf_{n\to+\infty}$ e $\limsup_{n\to+\infty}$ delle seguenti successioni:

i) $\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n$, ii) $\frac{3^{(-1)^n}+5\cos(n\pi/2)}{(-1)^{3n}+5\cos(2\pi/n)}$, iii) $(\sqrt{n}-\lfloor\sqrt{n}\rfloor)$.

2. Calcolare $\liminf_{n\to+\infty}$ e $\limsup_{n\to+\infty}$ delle seguenti successioni definite per ricorrenza:

i) $x_0=-3$ e $x_{n+1}=\frac{x_n+3}{3x_n+1}$ per $n\geq 0$, ii) $x_0=1$ e $x_{n+1}=\frac{8}{x_n^2}$ per $n\geq 0$.

3. Sia $P=(x,x^2)$ un punto del grafico della parabola $y=x^2$ diverso dall'origine O. Sia l la retta ortogonale in O al segmento OP e sia Q il punto di intersezione diverso da O tra il grafico della parabola $y=x^2$ e la retta l. Determinare la funzione *area del triangolo* OPQ al variare di $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e disegnarne il grafico.

4. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

i) Per ogni $x_0\in(0,1)$ esistono $y_1,y_2\in\mathbb{R}^+$ tali che $P=(x_0,0)$, $Q=(0,y_1)$ e $R=(1,y_2)$ sono i vertici di un triangolo equilatero.

ii) Esiste $x_0\in(0,1)$ e esistono $y_1,y_2\in\mathbb{R}^+$ tali che $P=(x_0,0)$, $Q=(0,y_1)$ e $R=(1,y_2)$ sono i vertici di un triangolo rettangolo di perimetro 3.

5. Rispondere alle seguenti domande.

i) Si consideri l'insieme dei coni (circolari retti) circoscritti a una sfera di raggio unitario. Qual è l'altezza del cono di volume minimo?

ii) Si consideri l'insieme dei coni (circolari retti) inscritti in una sfera di raggio unitario. Qual è l'altezza del cono di superficie totale massima?