1. Tracciare i grafici delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = |x-1|\sqrt[3]{x^2}$, ii) $f(x) = \min((x+1)e^{1/x}, |x|e^{-1/x})$,

iii) $f(x) = \dfrac{1+|\ln|x||}{1-|\ln|x||}$, iv) $f(x) = x + \arctan(\sqrt{|x-1|})$,

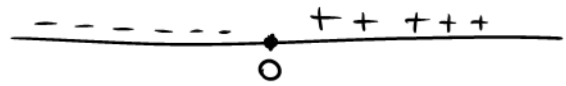
v) $f(x) = (x - \lfloor x \rfloor)^2 \sin(\pi x)$, vi) $f(f(f(x)))$ dove $f(x) = |x| - 1$.

Svolgimento: i) Sia $g(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ (allora $f(x) = |g(x)|$).

Il dominio di g è $D = \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$

Non ci sono asintoti.

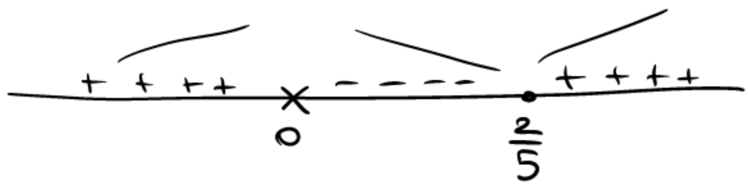
Segno di g:



Derivata prima:

$$g'(x) = x^{2/3} + (x-1)\frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(5x-2)$$

Segno di g':



In 0, g non è derivabile.

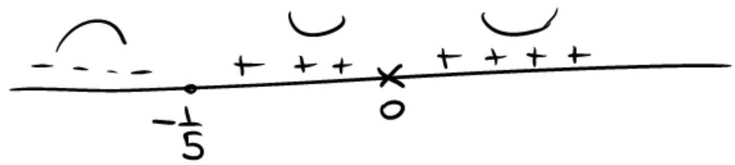
$$g'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^{\pm}} (x-1)x^{-1/3} = \mp\infty$$

Quindi 0 è una cuspide.

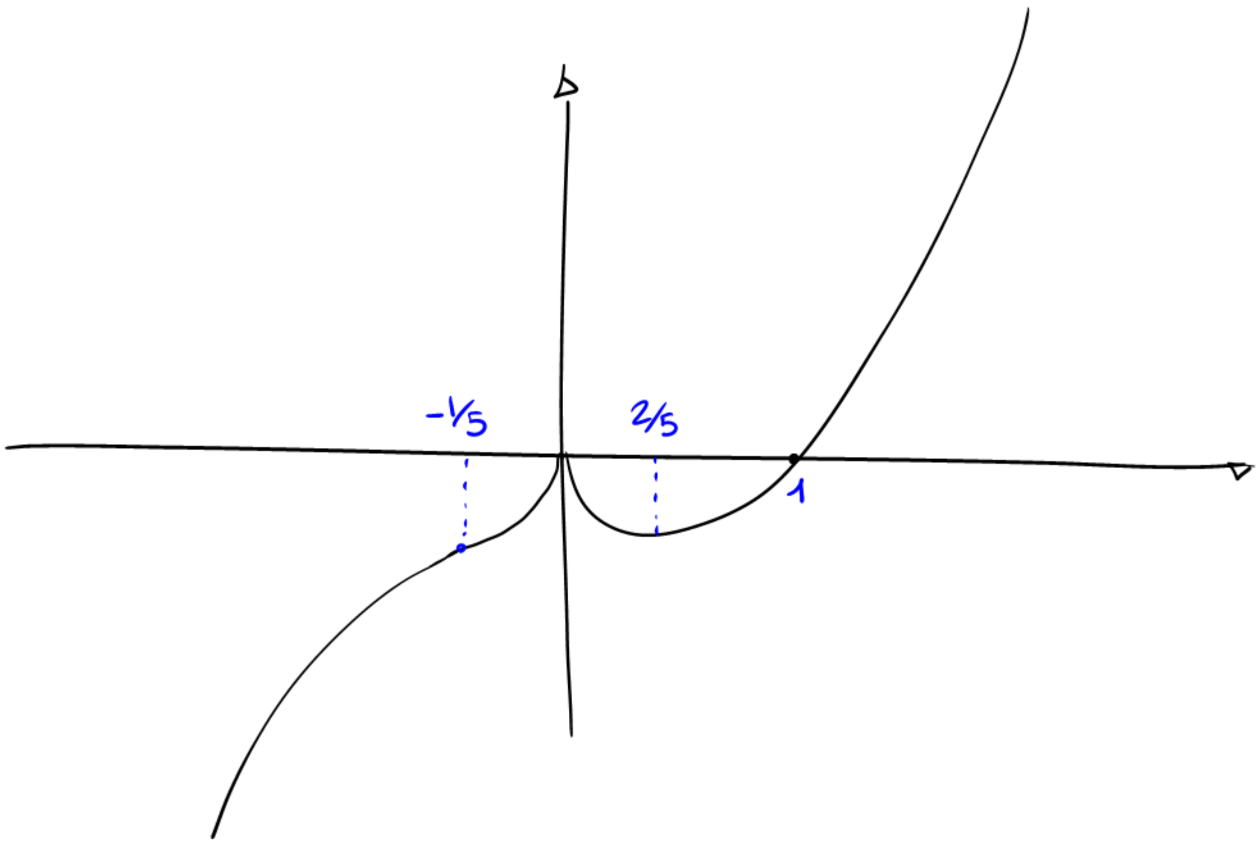
Derivata seconda:

$$g''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}x^{-4/3}(5x-2) + x^{-\frac{1}{3}}\cdot 5\right) = \frac{2x^{-4/3}}{9}(5x+1)$$

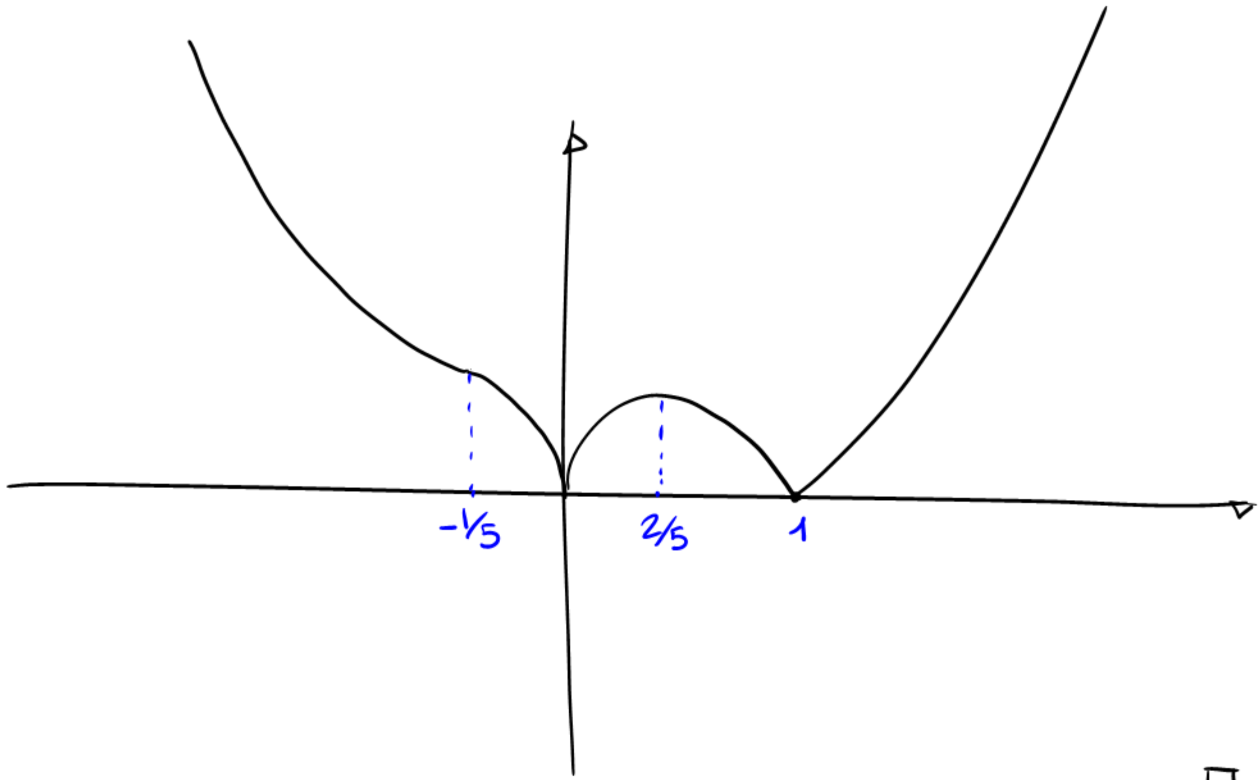
Segno di g'':



Quindi il grafico di g è



Mentre il grafico di $f = |g|$ è



$\square$

ii) Consideriamo $f(x)=(x+1)e^{1/x}$ e $g(x)=|x|e^{-1/x}$.

Sia per f che g il dominio è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Cominciamo con lo studio di f.

Segno di f: $\quad - - - \; \underset{-1}{\bullet} \; + + + \; \underset{0}{\times} \; + + + +$

Per $x\to\pm\infty$, $f(x)=(x+1)\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)= x+2+o(1)$

Quindi f ha un asintoto $y=x+2$ per $x\to\pm\infty$.

Inoltre $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$.

Derivata prima:

$$f'(x)= e^{1/x}+(x+1)\cdot e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{1/x}\left(\frac{x^2-x-1}{x^2}\right)$$

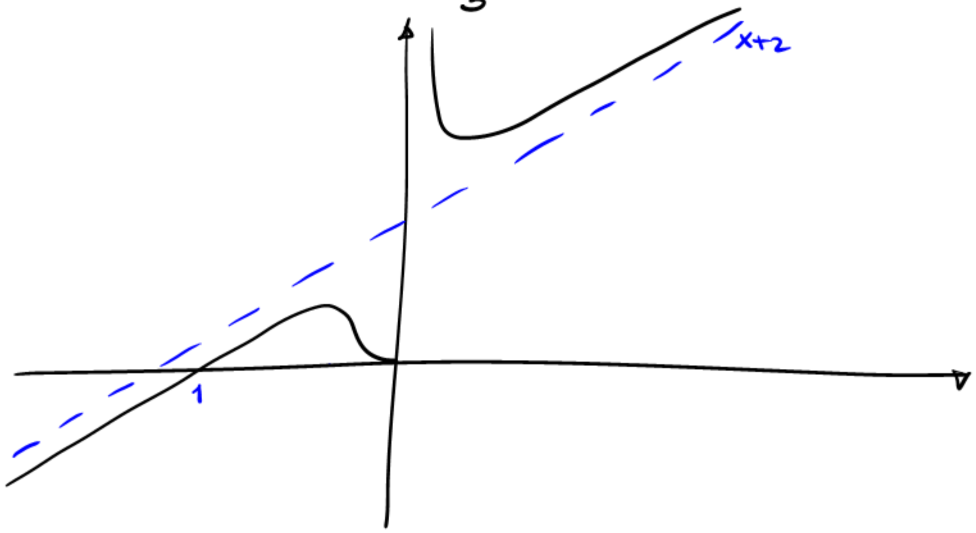
Segno di f': $\quad + + + \; \underset{\frac{1-\sqrt5}{2}}{\bullet} \; - - - \; \underset{0}{\times} \; - - - \; \underset{\frac{1+\sqrt5}{2}}{\bullet} \; + + +$

Derivata seconda:

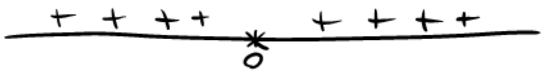
$$f''(x)= e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{x^2-x-1}{x^2}\right)+e^{1/x}\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)+e^{1/x}(x^2-x-1)\left(\frac{-2}{x^3}\right)$$

$$=\frac{e^{1/x}}{x^4}\left(\cancel{-x^2}+x+1+\cancel{2x^3}\cancel{-x^2}\cancel{-2x^3}+\cancel{2x^2}+2x\right)=\frac{e^{1/x}(3x+1)}{x^4}$$

Segno di f'': $\quad - - - \; \underset{-\frac{1}{3}}{\bullet} \; + + + \; \underset{0}{\times} \; + + + +$



Passiamo allo studio di $g(x) = |x| e^{-1/x}$

Segno di g 

Per $x \to \pm\infty$, $g(x) = |x| \left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \begin{cases} x - 1 + o(1) & \text{per } x > 0 \\ -x + 1 + o(1) & \text{per } x < 0 \end{cases}$

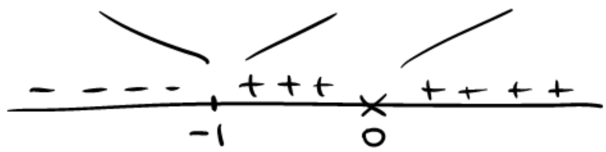
Quindi g ha due asintoti $y = x - 1$ per $x \to +\infty$ e $y = -x + 1$ per $x \to -\infty$.

Inoltre $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0^-} g(x) = +\infty$.

Derivata prima: per $x > 0$

$$g'(x) = e^{-1/x} + x \cdot e^{-1/x}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{-1/x}(x+1)}{x}$$

Analogamente, per $x < 0$, $g(x) = -\frac{e^{-1/x}(x+1)}{x}$.

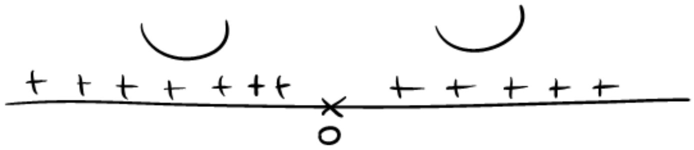
Segno di g': 

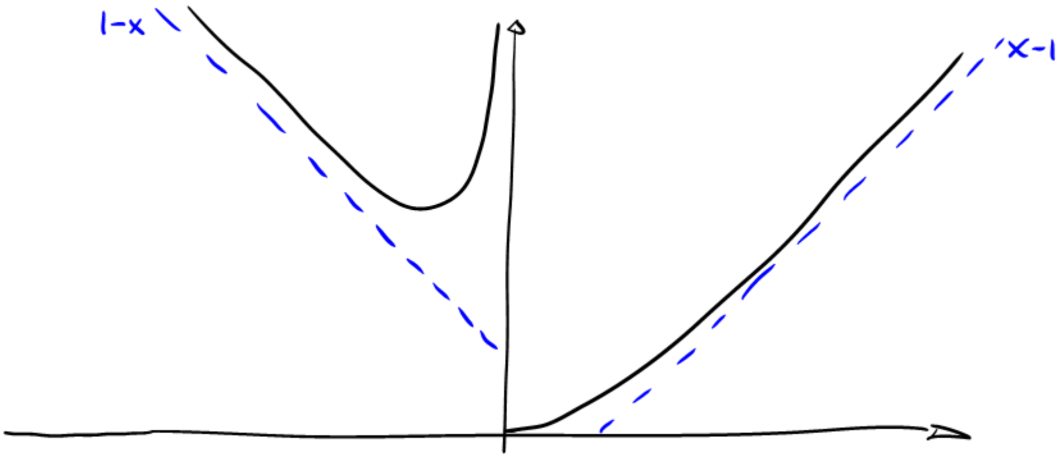
Derivata seconda: per $x > 0$

$$g''(x) = e^{-1/x} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{x+1}{x}\right) + e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x} + e^{1/x}(x+1)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{e^{-1/x}}{x^3}\left(\cancel{x} + 1 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2} - \cancel{x}\right) = \frac{e^{-1/x}}{x^3}.$$

Per $x < 0$, $g''(x) = -e^{-1/x}/x^3$.

Segno di g'' 



Per disegnare il grafico di $\min(f(x), g(x))$ è necessario confrontare f con g.

Dai grafici di f e g "sembra" che

$$\min(f(x),g(x)) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x>0 \\ f(x) & \text{se } x<0 \end{cases}.$$

Verifichiamolo. Per $x>0$,

$$f(x) = (x+1)e^{1/x} \overset{?}{\geq} |x|e^{-1/x} = xe^{-1/x} = g(x)$$

se e solo se

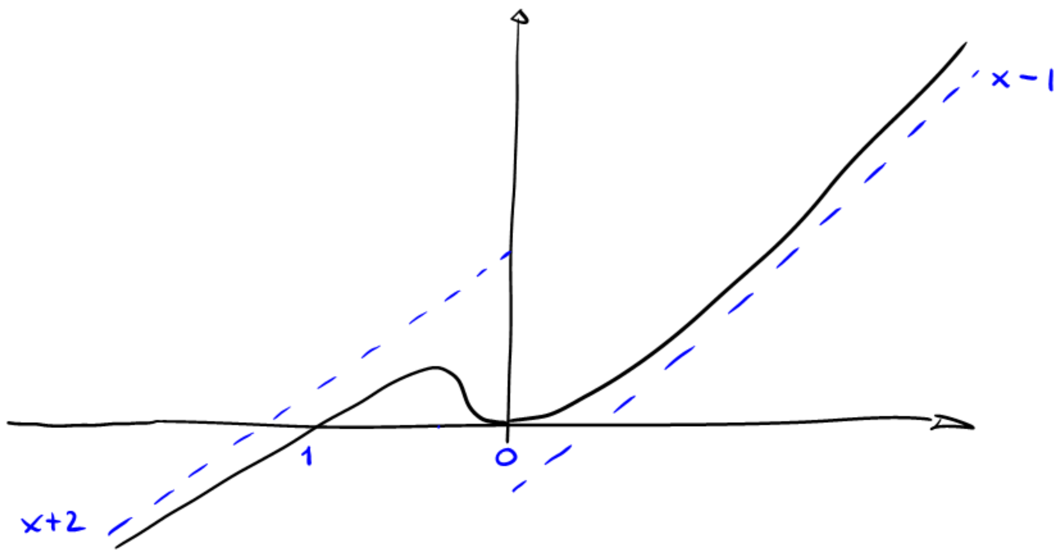
$$1+\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \geq e^{-2/x}$$

che è vero perché per $x>0$, $1+\frac{1}{x} > 1 > e^{-2/x}$.

Per $x<0$,

$$f(x) = (x+1)e^{1/x} \leq x+2 < 2 < e = g(-1) \leq g(x)$$

perché f sta sotto l'asintoto $y=x+2$ per $x<0$ e il punto di minimo assoluto di g in $(-\infty, 0)$ è $x=-1$. Così il grafico di $\min(f(x),g(x))$ è



□

iii) La funzione è pari e il suo dominio è

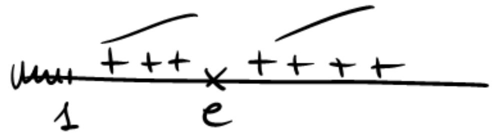
$$\mathbb{R}\setminus\left\{0,\pm e,\pm\frac{1}{e}\right\}.$$

Consideriamo prima il caso in cui $x\geq 1$.

$$f(x)=\frac{1+\ln x}{1-\ln x},\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-1,\quad \lim_{x\to e^{\pm}} f(x)=\mp\infty.$$

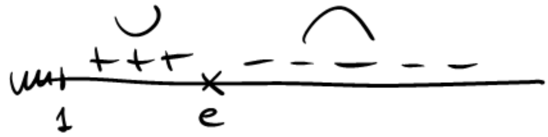
Derivate prima e seconda per $x\geq 1$ e $x\neq e$

$$f'(x)=\frac{2}{x(1-\ln x)^2}$$



$$f'_+(1)=2$$

$$f''(x)=\frac{2(1+\ln x)}{x^2(1-\ln x)^3}$$

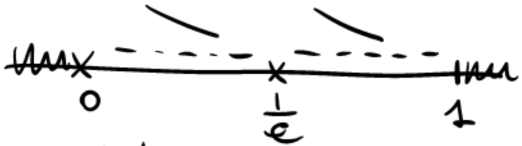


Consideriamo ora il caso in cui $0<x\leq 1$

$$f(x)=\frac{1-\ln x}{1+\ln x},\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=-1,\quad \lim_{x\to \frac{1}{e}^{\pm}} f(x)=\pm\infty.$$

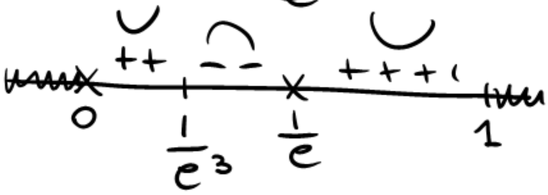
Derivate prima e seconda per $0<x\leq 1$ e $x\neq 1/e$

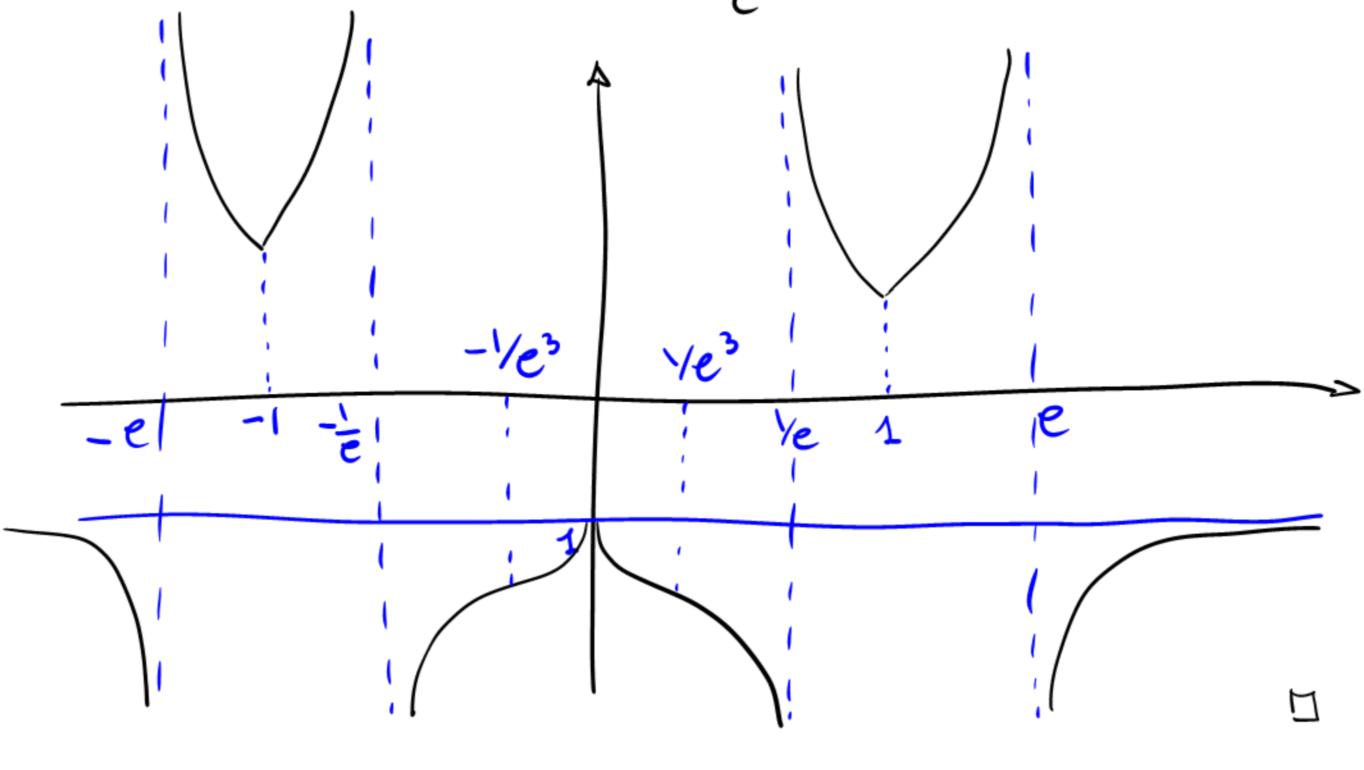
$$f'(x)=\frac{-2}{x(1+\ln x)^2}$$



$$f'_-(1)=-2$$

$$f''(x)=\frac{2(3+\ln x)}{x^2(1+\ln x)^3}$$





□

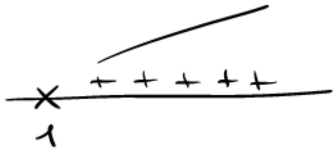
iv) Abbiamo che $D = \mathbb{R}$ e per $x \to \pm\infty$

$$f(x) - x = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{|x-1|}\right) \longrightarrow \frac{\pi}{2}$$

quindi $y = x + \frac{\pi}{2}$ è l'asintoto a $\pm\infty$.

Derivata prima: per $x > 1$

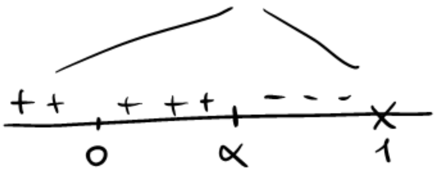
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\cancel{1} + (x - \cancel{1})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$



e per $x < 1$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{1 + (1-x)} \cdot \frac{(-1)}{2\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{(2-x)\cdot 2\sqrt{1-x} - 1}{(2-x)\cdot 2\sqrt{1-x}}$$



dove α è l'unico zero di f' per $x < 1$.

Infatti $g(x) = (2-x)2\sqrt{1-x}$ è strettamente decrescente su $(-\infty, 1)$

$$g'(x) = (-1)\,2\sqrt{1-x} + (2-x)\cdot\frac{2\cdot(-1)}{2\sqrt{1-x}} < 0$$

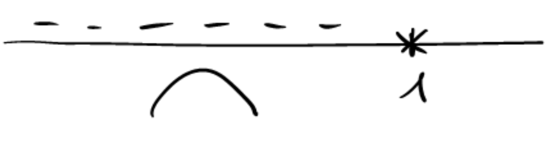
e $g(0) = 4 > 1 > g(1) = -1$.

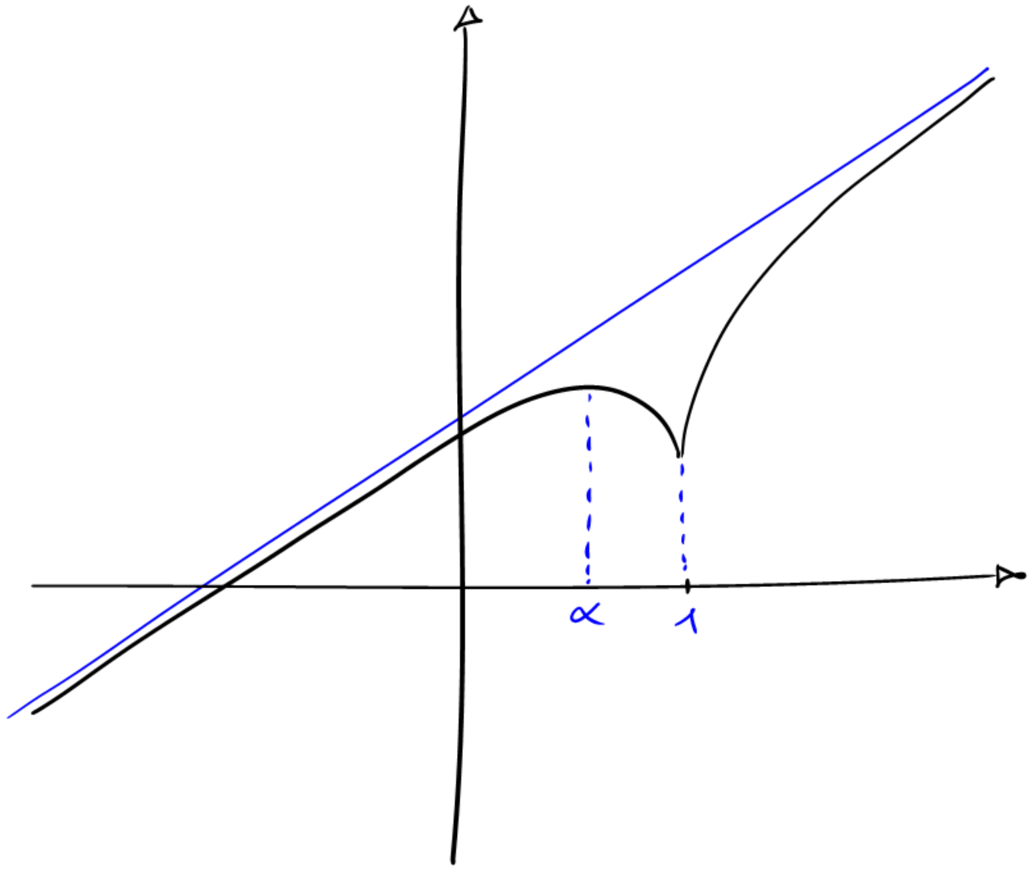
Derivata seconda: per $x > 1$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{(-1)}{(x-1)^{3/2}}$$

e per $x < 1$

$$f''(x) = -\frac{1}{(2-x)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{(-1)}{(2-x)}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-x)^{3/2}}$$





Da notare che $x_0 = 1$ è un punto di minimo locale e anche una cuspide

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty .$$

$\square$

V) Osserviamo che la funzione è periodica di periodo 2

$$\begin{aligned} f(x+2) &= (x+2-\lfloor x+2 \rfloor)^2 \cdot \mathrm{sen}(\pi(x+2)) \\ &= (x+\cancel{2}-\lfloor x \rfloor - \cancel{2})^2 \cdot \mathrm{sen}(\pi x) = f(x) \end{aligned}$$

ed è continua in $\mathbb{R}$ perché $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \to k^+} f(x) = \lim_{x \to k^-} f(x) = f(k) = 0 .$$

Per la periodicità consideriamo la funzione nell'intervallo $[-1,1]$:

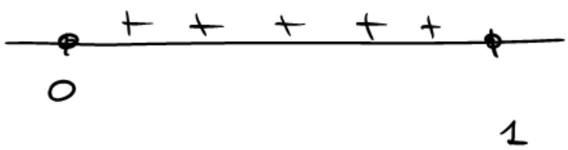
$$f(x)=\begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\pi x) & \text{se } x\in[0,1], \\ (x+1)^2 \operatorname{sen}(\pi x) & \text{se } x\in[-1,0). \end{cases}$$

Inoltre per $x\in[-1,0)$

$$f(x)=(x+1)^2 \operatorname{sen}(\pi x) = -f(x+1)$$

Quindo basta studiare la funzione nell'intervallo $[0,1]$.

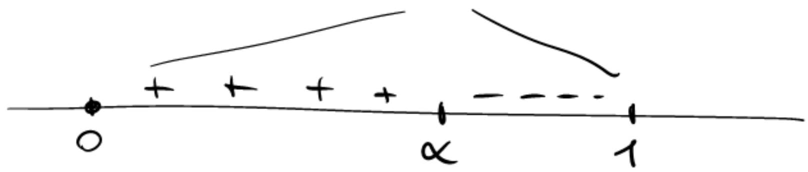
Segno:



Derivata prima:

$$f'(x)= 2x\cdot \operatorname{sen}(\pi x) + x^2\cdot\cos(\pi x)\cdot\pi$$
$$= x\,(\,2\operatorname{sen}(\pi x) + x\cos(\pi x)\cdot\pi)$$

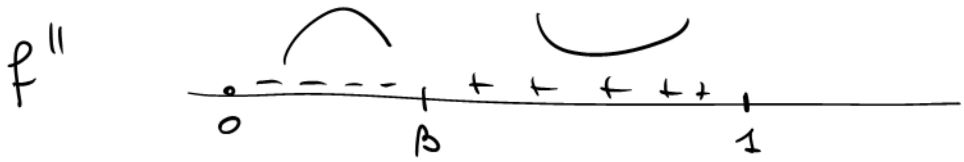
f'



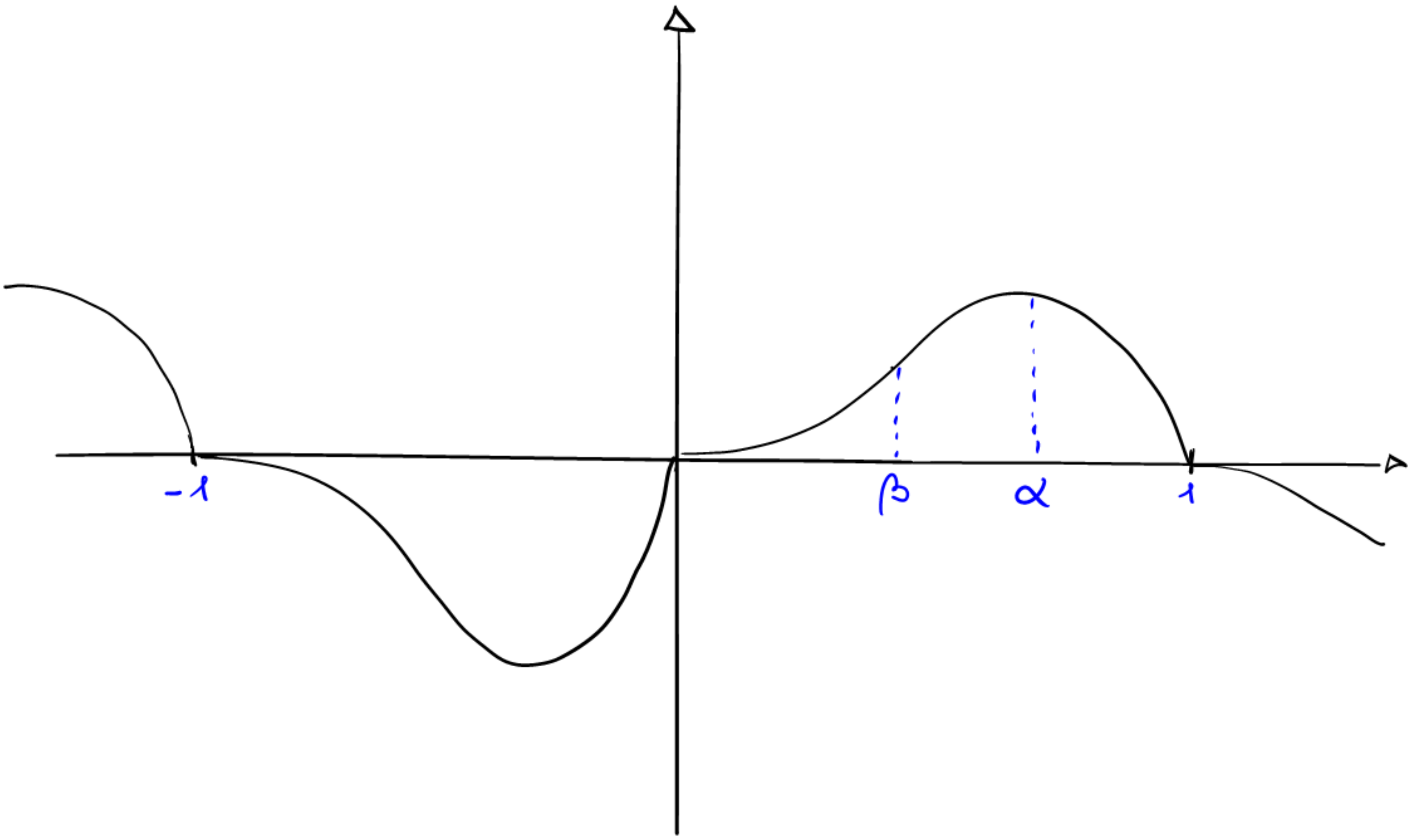
dove $\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ è l'unica soluzione dell'equazione $\operatorname{tg}(\pi x)=-\pi x$.

Derivata seconda:

$$f''(x)= 2\operatorname{sen}(\pi x) + 4\pi x\cos(\pi x) - \pi^2 x^2 \operatorname{sen}(\pi x)$$



dove $\beta \in (0, \frac{1}{2})$ (qui tralasciamo i dettagli).



Si noti ogni $x_0 \in \mathbb{Z}$ è un punto angoloso.

Ad esempio se $x_0 = 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \begin{cases} \xrightarrow{x>0} x \,\text{sen}(\pi x) \xrightarrow{x \to 0} 0 \\ \xrightarrow{x<0} \dfrac{(x+1)^2 \text{sen}(\pi x)}{x} \xrightarrow{x \to 0} \pi \end{cases}$$

e dunque $f'_+(0) = 0$ e $f'_-(0) = \pi$. $\square$

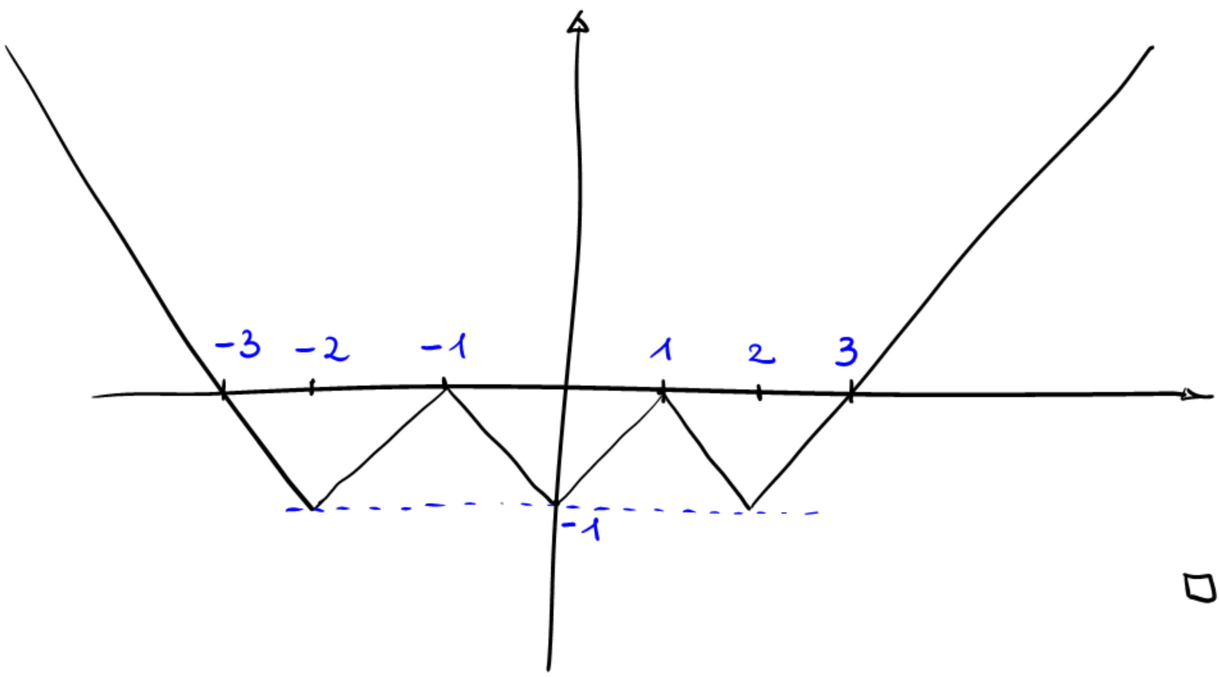
vi) Dato che $f(x)$ è pari anche $f(f(x))$ e $f(f(f(x)))$ lo sono, dunque possiamo supporre che $x \geq 0$.

Allora $f(x) = x-1$ e

$$f(f(x)) = \begin{cases} f(x)-1 & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x)-1 & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 1 \\ -x & \text{se } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$f(f(f(x))) = \begin{cases} f(f(x))-1 & \text{se } f(f(x)) \geq 0 \\ -f(f(x))-1 & \text{se } f(f(x)) \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-3 & \text{se } x \geq 2 \\ -(x-2)-1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ -(-x)-1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} x-3 & \text{se } x \geq 2 \\ 1-x & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ x-1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$



□

2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, determinare quante sono le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 0.$$

Svolgimento: Dimostriamo per induzione che per n pari $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) > 0$ e che per n dispari P_n è strettamente crescente in $\mathbb{R}$. Questo vuol dire che per n pari $P_n(x) = 0$ non ha nessuna soluzione, mentre per n dispari, siccome $\lim_{x \to \pm\infty} P_n(x) = \pm\infty$, per la stretta crescenza, $P_n(x) = 0$ ha un'unica soluzione. Ora $P_0(x) = 1 > 0$.

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Se $n+1$ è dispari allora n è pari e $P'_{n+1}(x) = P_n(x) > 0$. Quindi P_{n+1} è strettamente crescente. Se $n+1$ è pari allora n è dispari e $P'_{n+1}(x) = P_n(x)$ è strettamente crescente ossia P_{n+1} è strettamente convessa. $\lim_{x \to \pm\infty} P_{n+1}(x) = +\infty$ implica che P_{n+1} assume il valore minimo in un certo punto $x_0 \in \mathbb{R}$ dove $P'_{n+1}(x_0) = P_n(x_0) = 0$. Ora $x_0 \neq 0$ perché $P_n(0) = 1 \neq 0$. Così $\forall x \in \mathbb{R}$

$$P_{n+1}(x) \geq P_{n+1}(x_0) = P_n(x_0) + \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!} > 0$$

$\square$

3. Dimostrare le seguenti disuguaglianze.

i) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (x+y)^4 \leq 8(x^4+y^4)$.

ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad xy \leq \dfrac{|x|^a}{a} + \dfrac{|y|^b}{b} \quad$ con $a, b \in \mathbb{R}^+$ tali che $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$.

Svolgimento: Dato che $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$(x+y)^4 \leq (|x|+|y|)^4 \leq 8(|x|^4+|y|^4) = 8(x^4+y^4)$$

basta dimostrare la disuguaglianza per $x, y \geq 0$.
Se $x=0 \vee y=0$ la disuguaglianza è ovvia.
Allora per simmetria possiamo supporre che $y \geq x > 0$ e poniamo $t = y/x \geq 1$.
Così basta verificare che

$$\forall t \geq 1, \quad (1+t)^4 \leq 8(1+t^4).$$

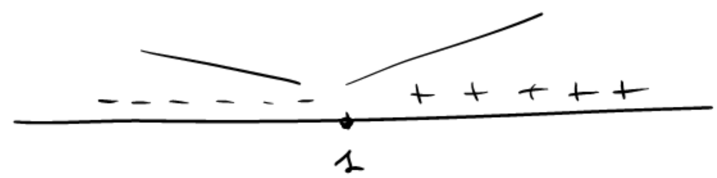
ossia che

$$\forall t \geq 1, \quad f(t) \overset{d}{=} 8(1+t^4) - (1+t)^4 \geq f(1) = 0$$

Infatti f risulta crescente in $[1, +\infty)$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 32t^3 - 4(1+t)^3 \\ &= 4(7t^3 - 3t^3 - 3t - 1) \\ &= 4(t-1)(7t^2+4t+1) \qquad (\Delta = 16-28<0) \end{aligned}$$

f'



La disuguaglianza si può anche dimostrare osservando che la funzione $g(x)=x^4$ è convessa in $\mathbb{R}$ e dunque per ogni $x,y\in\mathbb{R}$

$$\frac{(x+y)^4}{16} = g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{g(x)+g(y)}{2} = \frac{x^4+y^4}{2}.$$

$\square$

ii) Dato che $xy \leq |xy|$, basta far vedere

$$|xy| \leq \alpha |x|^{1/\alpha} + \beta |y|^{1/\beta}$$

dove $\alpha = \frac{1}{a} > 0$, $\beta = \frac{1}{b} > 0$, $\alpha+\beta=1$.

Osserviamo che la funzione $\ln(t)$ è concava in $(0,+\infty)$:

$$\ln\left(\alpha|x|^{1/\alpha}+\beta|y|^{1/\beta}\right) \geq \alpha \ln|x|^{1/\alpha} + \beta \ln|y|^{1/\beta}$$

$$= \frac{\cancel{\alpha}}{\cancel{\alpha}} \ln|x| + \frac{\cancel{\beta}}{\cancel{\beta}} \ln|y|$$

$$= \ln|x||y| = \ln|xy|$$

e per la crescenza di $\ln(t)$ si ottiene

$$\alpha|x|^{1/\alpha}+\beta|y|^{1/\beta} \geq |xy|$$

ossia la disuguaglianza richiesta.

$\square$

4. Sia $\mathcal{G} = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in \mathbb{R}\}$ e si consideri la funzione

$$f(t) = \inf\{\sqrt{x^2 + (t-y)^2} \ : \ (x,y) \in \mathcal{G}\} \quad \text{per } t \in \mathbb{R}.$$

Determinare esplicitamente la funzione f, farne il grafico e individuare i punti in cui non è derivabile.

Svolgimento: È chiaro che $f(0)=0$. Sia ora $t \neq 0$ e consideriamo la funzione

$$h_t(x) = \left(x^2 + (t-x^2)^2\right)^{1/2} = \left(x^4 + (1-2t)x^2 + t^2\right)^{1/2}.$$

Allora per $t \neq 0$, $h_t(x) > 0$ e

$$h_t'(x) = \frac{1}{2h_t(x)} \cdot \left(4x^3 + 2(1-2t)x\right) = \frac{x\left(2x^2 + (1-2t)\right)}{h_t(x)}.$$

Così se $(1-2t) \geq 0$ ossia $t \leq \frac{1}{2}$ allora

$h_t'(x)$	$- - - - - - -$	0	$+ + + + + +$
		min assoluto	

e $h_t(0) = (t^2)^{1/2} = |t| = f(t)$.

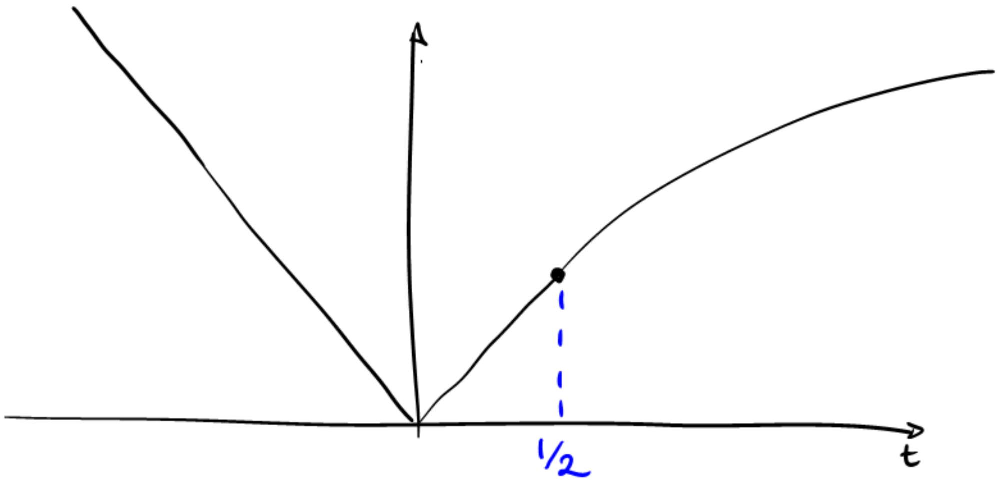
Se invece $(1-2t) < 0$ ossia $t > \frac{1}{2}$ allora

$h_t'(x)$	$- - -$	$-\sqrt{t-\frac{1}{2}}$	$+ + + +$	0	$- - - - - -$	$\sqrt{t-\frac{1}{2}}$	$+ + +$

min assoluti

e $h_t\left(\pm\sqrt{t-\frac{1}{2}}\right) = \left(t - \frac{1}{2} + (\cancel{t} - \cancel{t} + \frac{1}{2})^2\right)^{1/2} = \sqrt{t - \frac{1}{4}} = f(t).$

Quindi $f(t) = \begin{cases} |t| & \text{se } t \le \frac{1}{2} \\ \sqrt{t-\frac{1}{4}} & \text{se } t > \frac{1}{2} \end{cases}$.



Si noti che f non è derivabile in 0 dove

$f'_{\pm}(0) = \pm 1$, mentre $f'_{-}(\frac{1}{2}) = 1 = f'_{+}(\frac{1}{2})$.

$\square$

5. Si consideri lo spazio vettoriale $C(\mathbb{R})$ a coefficienti in $\mathbb{R}$.
Dimostrare che se $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ allora

i) le funzioni $x^{a_1}, x^{a_2}, \ldots, x^{a_n}$ sono linearmente indipendenti,

ii) le funzioni $a_1^x, a_2^x, \ldots, a_n^x$ sono linearmente indipendenti.

Svolgimento:

i) Siano $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad c_1 x^{a_1} + c_2 x^{a_2} + \cdots + c_n x^{a_n} = 0.$$

Sia $1 \leq r \leq n$ tale che $c_r \neq 0$ e $c_{r+1} = \cdots = c_n = 0$.
Allora

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad c_1 x^{a_1} + c_2 x^{a_2} + \cdots + c_r x^{a_r} = 0.$$

Ora per $x \to +\infty$ il primo membro tende a $+\infty$ o $-\infty$, a seconda del segno di c_r mentre il secondo membro è identicamente nullo. Contraddizione.

Quindi $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ ossia $x^{a_1}, x^{a_2}, \ldots, x^{a_n}$ sono linearmente indipendenti.

$\square$

ii) Siano $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad c_1 a_1^x + c_2 a_2^x + \ldots + c_n a_n^x = 0.$$

Sia $1 \leq r \leq n$ tale che $c_r \neq 0$ e $c_{r+1} = \cdots = c_n = 0$.

Allora

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad c_1 a_1^x + c_2 a_2^x + \ldots + c_r a_r^x = 0$$

Dato che $a_r > 1$ allora per $x \to +\infty$ si ottiene che il primo membro tende a $+\infty$ o $-\infty$ a seconda del segno di c_r mentre il secondo membro è identicamente nullo.

Contraddizione. Quindi $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ ossia $a_1^x, a_2^x, \ldots, a_n^x$ sono linearmente indipendenti. $\square$