

Tutorato di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

12 dicembre 2014

1. Tracciare i grafici delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = |x - 1|\sqrt[3]{x^2}$, ii) $f(x) = \min((x + 1)e^{1/x}, |x|e^{-1/x})$,

iii) $f(x) = \frac{1 + |\ln |x||}{1 - |\ln |x||}$, iv) $f(x) = x + \arctan(\sqrt{|x - 1|})$,

v) $f(x) = (x - [x])^2 \sin(\pi x)$, vi) $f(f(f(x)))$ dove $f(x) = |x| - 1$.

2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, determinare quante sono le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 0.$$

3. Dimostrare le seguenti disuguaglianze.

i) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (x + y)^4 \leq 8(x^4 + y^4)$.

ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad xy \leq \frac{|x|^a}{a} + \frac{|y|^b}{b}$ con $a, b \in \mathbb{R}^+$ tali che $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

4. Sia $\mathcal{G} = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ e si consideri la funzione

$$f(t) = \inf\{\sqrt{x^2 + (t - y)^2} : (x, y) \in \mathcal{G}\} \quad \text{per } t \in \mathbb{R}.$$

Determinare esplicitamente la funzione f , farne il grafico e individuare i punti in cui non è derivabile.

5. Si consideri lo spazio vettoriale $C(\mathbb{R})$ a coefficienti in \mathbb{R} .

Dimostrare che se $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n$ allora

i) le funzioni $x^{a_1}, x^{a_2}, \dots, x^{a_n}$ sono linearmente indipendenti,

ii) le funzioni $a_1^x, a_2^x, \dots, a_n^x$ sono linearmente indipendenti.